This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

GODFREY LOWELL CABOT SCIENCE LIBRARY
of the Harvard College Library

This book is
FRAGILE
and circulates only with permission.
Please handle with care
and consult a staff member
before photocopying.

Thanks for your help in preserving
Harvard's library collections.

TRAITÉ DESCRIPTIF

ET RAISONNÉ

DES

CONSTRUCTIONS HYDRAULIQUES.

Les formalités voulues par la loi pour assurer la propriété de cet ouvrage ont été remplies.
Droits de traduction et de reproduction réservés.

Bruxelles. — Typ. Bruylant-Christophe et Cie, rue Blaes, 31.

TRAITÉ DESCRIPTIF

ET RAISONNÉ

DES

CONSTRUCTIONS

HYDRAULIQUES

A LA MER ET DANS LES EAUX COURANTES

AVEC APPLICATIONS AUX TRAVAUX MILITAIRES,

PAR

E. ROFFIAEN,

CAPITAINE DU GÉNIE, ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE MILITAIRE DE BELGIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

HYDRAULIQUE.

BRUXELLES.

BRUYLANT-CHRISTOPHE & COMPAGNIE, IMPRIMEURS-ÉDITEURS,

PLACE SAINT-JEAN, 12.

A. DECQ, RUE DE LA MADELEINE, 9.

PARIS.

CH. TANERA, ÉDITEUR,

QUAI DES AUGUSTINS, 27.

LA HAYE.

HÉRITIERS DOORMAN,

LIBRAIRES.

1861

Eng 928.61

HARVARD COLLEGE
FEB 5 1921
LIBRARY

Degrand fund
(3 vols.)

AVANT-PROPOS.

Il n'existe actuellement aucun traité d'hydraulique qui réunisse les qualités indispensables à un ouvrage didactique, c'est-à-dire, l'exactitude théorique et expérimentale jointe à la simplicité et à la concision de la méthode.

Le traité de D'Aubuisson, recherché encore aujourd'hui, a servi de guide aux ingénieurs pendant de longues années. Pour la plupart, son principal mérite consiste en ce que l'éminent hydraulicien procède généralement de l'expérience à la théorie : « Mon ouvrage, dit-il « lui-même dans son avertissement, est, par sa nature, bien plus du « domaine des sciences d'observation, des sciences physiques, que « des sciences mathématiques; c'est un traité d'hydraulique expéri- « mentale et appliquée, et non d'hydraulique rationnelle..... De là « vient que je ne me suis pas servi du *principe des forces vives ;* prin-

« cipe si fécond et devenu aujourd'hui presque l'unique instrument « avec lequel les géomètres attaquent les questions relatives à l'hy- « draulique et aux machines.... Ce livre, cette sorte de *manuel* d'hy- « draulique à l'usage des ingénieurs, n'est point un ouvrage de « mathématiques, ni même de mathématiques appliquées..... »

Ainsi, d'après D'Aubuisson, l'observation est le principe, la révélation : les formules en découlent. Il en résulte l'empirisme.

Malheureusement, il nous paraît impossible d'admettre l'existence séparée d'une hydraulique expérimentale et d'une hydraulique rationnelle. Dans cette science, les expériences ont sans doute une part très-large; mais, par suite, elles doivent être sévèrement contrôlées. Et quels résultats donnerait l'observation sans l'aide de la théorie? Les faits seraient-ils compris, distingués, classés, avec autant de lucidité, si l'on ne possédait, à priori, quelques notions empruntées aux phénomènes du monde réel, ou même à la philosophie naturelle? Parviendrait-on, avec quelque certitude, à saisir les lois qui régissent des résultats d'expérience souvent innombrables et variés entre eux? L'hydraulique ayant pour but la connaissance de phénomènes qui se lient à la constitution intime des corps, l'observation est nécessaire pour trouver les données dans la nature, et la théorie, pour en faciliter les recherches et en déduire des conséquences. Tous les hommes de génie auxquels on doit de grandes découvertes, étaient à la fois des praticiens et des théoriciens; seulement praticiens, ils n'auraient rien vu au delà de ce que leur indiquait l'expérience; sans l'observation, ils n'auraient créé que des systèmes.

Depuis un demi-siècle, les plus illustres mathématiciens ont cherché à imprimer à l'hydraulique une marche progressive en rapport avec celle des autres sciences. Avant eux, cette branche si importante était considérée généralement comme purement expérimentale; à part

quelques principes fondamentaux, dus en grande partie aux Bernouilli, les rares hypothèses émises à priori n'étaient guère basées sur la réalité des phénomènes de la nature. Ce n'est pas que l'on manquât de moyens de comparaison : l'on disposait, au contraire, d'un nombre incalculable d'expériences, qui se présentaient sous le patronage d'éminents physiciens, et qui servaient à donner une sanction, plus ou moins légitime, à des formules empiriques. Mais une partie de ces observations avaient été faites dans des conditions peu méthodiques et en dehors des circonstances ordinaires de la pratique; ou bien encore, l'on en tirait des conclusions trop hasardées, en posant des assimilations que des expériences spéciales auraient seules pu sanctionner. C'est ainsi que l'on concluait la vitesse moyenne des grands canaux naturels au moyen des résultats présentés dans vingt-trois expériences, faites par Dubuat, sur des canaux artificiels n'ayant pas 1^m de périmètre ni $0^{m^2}10$ de section.

Parfois aussi, l'on perdait de vue que tout progrès s'appuie sur la méthode; qu'il ne s'agit donc nullement d'entasser expérience sur expérience, sans ordre et sans principes arrêtés, pour faire sortir de ce mélange une série de chiffres, qui n'ont d'autre particularité que d'être différents. « Des expériences, si nombreuses qu'elles soient, dit « M. Dupuit, loin d'être un avantage, sont un inconvénient lorsqu'elles « ne sont pas guidées par une *saine théorie;* elles ne font alors que « donner l'apparence de la vérité à des erreurs graves. » Cette juste appréciation, due à un ingénieur aussi logique que profond, s'applique parfaitement à l'erreur admise il y a peu d'années encore, par Génieys, Belanger, etc., et même par l'Académie des sciences, au sujet des prétendus progrès apportés par Eytelwein dans la théorie des eaux courantes. Le degré de précision d'un coefficient empirique n'est pas forcément une fonction du nombre d'expériences que l'auteur peut aligner;

partir d'un tel principe pour corriger une formule, c'est s'exposer, comme Eytelwein, à obtenir un résultat aussi inexact que le premier.

Les recherches théoriques et expérimentales les plus remarquables se trouvent spécialement dans les mémoires d'hydraulique présentés, depuis un demi-siècle environ, à l'Académie des sciences de Paris. Il existe, en outre, plusieurs ouvrages importants, qui ont imprimé à cette science des progrès réels, et parmi lesquels on peut citer en première ligne les *Études* de M. Dupuit, sur le mouvement des eaux courantes et sur leur régime.

Mais il est à remarquer que les mémoires de MM. Lesbros, Poncelet, Vauthier, Coriolis, Sonnet, Dupuit, D'Arcy, etc., ne traitent que certaines questions spéciales. Quant aux autres ouvrages et aux cours de MM. Génieys, Navier, Belanger, Bresse, etc., ils sont plutôt remarquables par les développements analytiques de quelques théories que par des qualités réellement didactiques; la partie rationnelle y est longuement traitée, et ce n'est pas enlever de leur mérite que de les considérer comme trop transcendants pour la généralité des praticiens.

Dans notre traité, une part limitée a été faite aux calculs d'analyse, ainsi qu'aux théories spéculatives, que l'on a toujours le loisir d'étudier plus tard dans les écrits d'où elles sont extraites. Cependant il renferme, sous le moindre volume et le moindre prix, tous les principes importants, ainsi que des notions suffisantes pour apprécier et discuter les mémoires ou autres ouvrages qui ont paru sur l'hydraulique. Il faut en excepter la question des turbines et roues motrices; nous ne l'avons point exposée, d'abord, parce qu'elle ne se rapporte pas au but de l'ouvrage dont ce traité d'hydraulique n'est que la première partie; en second lieu, parce que ce chapitre a été développé d'une façon complète et remarquable par MM. Poncelet, Belanger, etc. Du reste, c'est là un sujet d'application toute spéciale, et

bien peu d'hydrauliciens sont appelés à le mettre en pratique. Notre attention s'est portée principalement sur les grandes questions générales, susceptibles d'applications fréquentes pour l'ingénieur, tant civil que militaire; telles que la question du mouvement, uniforme ou varié, des eaux dans les conduites et les canaux découverts; celle des résistances produites par les fluides et les solides dans leur mouvement relatif, ainsi que les méthodes théoriques et expérimentales de jaugeage.

Sans entrer dans des développements qui nuiraient à la concision de l'ouvrage, il nous a paru indispensable de faire connaître, à l'occasion, l'histoire des progrès successifs de l'hydraulique, ainsi que les noms des savants qui l'ont guidée dans le chemin de la vérité. Rapporter à chacun la part qui lui revient, rappeler, en quelques lignes, les admirables découvertes des Galilée, des Huygens, des Maupertuis, des d'Alembert, et de tant d'autres pères de la science, c'est non-seulement faire acte de justice et adoucir l'aridité de l'étude, mais c'est augmenter encore l'amour du travail chez l'homme vraiment studieux; c'est lui inspirer peut-être le désir de connaître, d'une manière plus intime, les liens philosophiques qui relient entre elles toutes les connaissances humaines et qui les rattachent aux lois du monde métaphysique ou réel.

Mais, s'il faut accorder un juste tribut d'admiration aux véritables génies de la science, s'il faut rappeler les noms de ces éminents ingénieurs dont les travaux ont imprimé de notables progrès à l'hydraulique, il nous paraît aussi de toute nécessité de détruire quelques erreurs, admises trop souvent par des savants recommandables, et de faire connaître, d'une façon concise, l'origine et la marche de certaines théories inexactes, afin d'en dévoiler logiquement la fragilité et de mettre l'ingénieur en garde contre ces égarements ou ces sophismes scientifiques.

HYDRAULIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

HYDROSTATIQUE ET HYDRODYNAMIQUE RATIONNELLES.

A. NOTIONS GÉNÉRALES.

I. Définitions.

L'hydraulique est la science qui a pour objet la connaissance des lois de l'équilibre et du mouvement des fluides.

L'hydraulique ne se compose pas uniquement d'abstractions mathématiques ou mécaniques. Pour soumettre au calcul les lois de la nature, il s'agit moins, le plus souvent, d'établir des théories analytiques rigoureuses que de rechercher par des procédés quelconques, soit théoriquement, soit par les indications de la physique expérimentale, les phénomènes et les lois des fluides dans le monde réel. De la nécessité de tenir compte de la constitution intime des corps ressort naturellement l'obligation de faire certaines hypothèses, plus ou moins incertaines à priori, et dont l'expérience doit être la sanction nécessaire.

La partie rationnelle de l'hydraulique se divise en *hydrostatique* et *hydrodynamique*. La première est consacrée aux conditions d'équili-

bre des fluides ; dans la seconde, il est question des lois de leur mouvement.

Les gaz et les liquides sont désignés collectivement sous le nom de fluides. Les gaz sont très-compressibles sous une pression extérieure, c'est-à-dire que, sous cette action, leur volume est très-variable. Ils présentent le même phénomène par l'action de la chaleur. Les liquides, au contraire, sont très-peu compressibles, mais ils le sont. Il est donc inexact de désigner ces deux états des corps par la dénomination de *fluides élastiques* et de *fluides incompressibles*. L'on admet cependant, en théorie, cette dernière hypothèse.

Quand la pression, et partant la densité des gaz, varie très-peu, il est permis de les considérer, à leur tour, comme sensiblement incompressibles, et de leur appliquer les mêmes raisonnements qu'aux liquides. Aussi, l'on comprend en général dans l'hydrostatique l'équilibre des gaz, ou *aérostatique*. Il n'y a, pour ces fluides soumis à l'action de la pesanteur, qu'une seule condition d'équilibre, c'est que leur *force élastique* soit la même dans toute l'étendue d'une couche de *niveau*, c'est-à-dire parallèle à la surface du sphéroïde terrestre.

Cette force élastique, ou *tension*, est la mesure de la pression que le gaz éprouve en chaque point. Elle provient de la *propriété fondamentale* des corps gazeux, dont les molécules tendent à s'éloigner sans cesse les unes des autres ; et elle donne une idée très-claire du principe de mécanique que : « la réaction est toujours égale à l'action. »

L'hydrodynamique comprend aussi la recherche des lois du mouvement des fluides gazeux, ou *aérodynamique*.

Des expériences faites par MM. *Girard* et *D'Aubuisson*, en France, et par M. *Langerhjelm*, en Suède, confirment l'analogie qui existe entre l'écoulement des liquides et celui des gaz, lorsque, la température restant constante, les pressions intérieure et extérieure sont peu différentes. L'on comprend, en effet, que, si un corps gazeux, enfermé dans un réservoir percé d'un petit orifice, est soumis à une pression peu différente de celle du gaz ou du fluide extérieur dans lequel il doit s'écouler, sa vitesse d'écoulement devient faible, et le mouvement presque insensible dans le réservoir ; il en résulte une différence négligeable entre les vitesses de deux tranches successives

de la masse fluide, qui pourra, par suite, être considérée comme incompressible.

Nous indiquerons sommairement ce qui est du domaine de l'*aérométrie*. Notre but, dans cet ouvrage, est de traiter spécialement les questions d'équilibre ou de mouvement des *liquides*, proprement dits, qui se rapportent aux divers travaux hydrauliques.

Établissons d'abord quelques notions préliminaires, et fixons la valeur de certaines quantités qui se présentent fréquemment dans les calculs du mouvement des fluides.

L'air atmosphérique, comme les autres fluides élastiques, exerce des pressions provenant de la pesanteur et variables avec les hauteurs des points que l'on considère.

Galilée, le premier, prouva par l'expérience que l'air est pesant; son disciple, *Toricelli*, mesura la valeur de cette pression par le principe du baromètre. A Paris, la hauteur barométrique du mercure varie de 0^m72 à 0^m78; sa valeur moyenne y est 0^m756. Au niveau des mers, la hauteur moyenne paraît être partout 0^m7629. L'on adopte généralement 0^m76 pour pression normale.

Le poids d'un mètre cube de mercure à 0° étant de 13586^k, c'est-à-dire $13\frac{586}{1000}$ fois plus grand que celui de l'eau, il suffit de multiplier par $13\frac{586}{1000}$ ou 13,586 la hauteur normale 0^m76, pour avoir la hauteur de la colonne d'eau qui ferait équilibre à la pression atmosphérique. L'on a donc 10^m33 pour cette hauteur; et la pression, par centimètre carré, a pour valeur 1^k033; en effet :

$$\frac{1000^k \times 10,33}{10000} = 1^k033$$

L'on adopte généralement, dans l'industrie, une hauteur de 10^m00 au lieu de 10^m33; ce qui correspondrait à une colonne barométrique de 0^m736 supérieure encore à 0^m713, limite inférieure des colonnes barométriques observées à Paris. La pression, par centimètre carré, est alors :

$$\frac{1000^k \times 10}{10000} = 1^k$$

et l'on obtient l'espèce d'*unité* appelée *atmosphère*, dont on se sert pour mesurer les hautes pressions.

D'après les expériences de MM. *Biot* et *Arago*, un mètre cube d'air sec à 0° et sous la pression 0^m76, pèse 1^k299. Sous l'action de la chaleur, l'air se dilate de $\frac{1}{267}$ ou des 0,00375 de son volume, pour chaque degré du thermomètre centigrade, à partir du zéro de ce thermomètre. Par suite, si le volume d'une masse d'air à 0° est représenté par 1, ce volume à t^o sera $1 + 0{,}00375\ t$.

Cette valeur $\frac{1}{267}$, pour le *coefficient de dilatation* des gaz, est généralement adoptée. Elle est due à *Gay-Lussac*, dont les expériences ont constaté que tous les gaz, simples ou composés, se dilatent de la même quantité pour des augmentations égales de température; et cela, quelles que soient les pressions, égales ou différentes, auxquelles ils sont soumis, pourvu que la force élastique de chaque gaz reste constante, pendant toute la durée de l'épreuve.

Il résulte cependant des remarquables expériences de M. *Regnault*, que cette belle loi n'est vraie que d'une manière approchée, et que le coefficient peut varier de 0,00366 à 0,003685 du volume primitif, pris à 0° sous la pression 0^m76.

D'après *Rudberg*, le coefficient se rapproche de la valeur précédente, et peut être représenté par 0,003646.

Nous avons donc :

Gay-Lussac	0,00375	ou	$\frac{1}{267}$
Regnault	0,00366	ou	$\frac{1}{275}$
Rudberg	0,003646	ou	$\frac{1}{275}$

Adoptant le coefficient $\frac{1}{267}$, nous concluons des observations précédentes, que le poids d'un mètre cube d'air, à t^o et sous la pression P, est représenté par :

$$1{,}299 \times \frac{P}{0{,}76} \times \frac{1}{1 + 0{,}00375\ t} = 1{,}709 \frac{P}{1 + 0{,}00375\ t}$$

Mais l'air est toujours chargé plus ou moins de vapeur aqueuse ; celle-ci, en s'y mêlant, tend à diminuer le poids du mètre cube réel. Or, comme cette quantité de vapeur croît avec la température, l'on en tient compte approximativement en augmentant le dénominateur proportionnellement à t ; à cet effet, l'on pose comme valeur générale :

$$\text{Poids du mètre cube à } t^\circ \text{ et sous } 0^m76 = 1,709 \frac{P}{1 + 0,004\, t}$$

Si δ est le poids spécifique de l'air, et δ' celui d'un gaz quelconque, le poids du mètre cube de ce dernier sera :

$$1^k709 \cdot \frac{\delta'}{\delta} \cdot \frac{P}{1 + 0,004\, t}$$

Nous avons adopté 1000^k pour le poids du mètre cube d'eau ; cette valeur suppose l'eau parfaitement pure ou distillée, prise à 4°, c'est-à-dire à son maximum de densité. En dessous de 4° sa densité décroît, lentement d'abord, puis rapidement vers la congélation ; c'est ainsi que le mètre cube de glace ne pèse plus que 930^k. A 50° la densité de l'eau est 0,98758 ; à 100° ce n'est plus que 0,95670. Mais l'on fait abstraction des erreurs négligeables provenant du plus ou moins de pureté de l'eau, de la température, ainsi que de la perte du poids provenant de l'air, conformément au principe d'Archimède.

Il nous reste à fixer la valeur de la quantité variable g qui exprime l'accélération due à la pesanteur, et qui représente, par conséquent, l'intensité de cette force accélératrice dans un lieu donné. Si l'on fait $t = 1''$ dans les formules

$$v = gt \text{ et } e = \frac{1}{2} gt^2$$

du mouvement *uniformément varié*. l'on peut énoncer aussi que g représente la vitesse acquise, au bout d'une seconde, par l'influence de la pesanteur ; ou bien encore, le double de l'espace parcouru dans le même temps.

D'après les lois remarquables trouvées par *Huygens*, la détermination du mouvement rectiligne des graves peut être ramenée à la mesure de la longueur du pendule simple qui bat les secondes. La formule suivante donne, en secondes, la durée t des oscillations très-

petites d'un pendule circulaire (ou cycloïdal) simple, d'une longueur l exprimée en mètres

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Or, la mesure du pendule simple peut être opérée avec une très-grande précision; elle donne $0^m993855$ à l'Observatoire de Paris. D'où l'on conclut :

$$gt^2 = \pi^2 l$$

Ou bien :

$$2e = \pi^2 l$$

$$e = \frac{1}{2} \pi^2 l$$

$$e = \frac{\pi^2}{2} \cdot 0^m993855 = 4^m9044$$

c'est-à-dire que, dans ce lieu, un corps grave descend de 4^m9044 durant la première seconde de sa chute. Si au bout de ce temps la gravité cessait d'agir sur lui, il continuerait à descendre, mais d'un mouvement uniforme et en parcourant un espace double ou 9^m8088 par seconde. En effet, si nous faisons $t = 1$ la formule donne :

$$gt^2 = \pi^2 l$$
$$g = \pi^2 l = 9{,}8088$$

Ce nombre, qui exprime la vitesse imprimée par la gravité dans l'unité de temps, représente, pour Paris, l'intensité de cette force accélératrice.

La quantité g est donc variable. Elle augmente avec la latitude et elle diminue avec l'élévation au-dessus du niveau de la mer. L'on a généralement :

$$g = 9^m8051 \cdot (1 - 0{,}00284 \cos. 2L) \left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$

L étant la latitude du lieu, h son élévation au-dessus du niveau de la mer et R le rayon du sphéroïde terrestre, à ce niveau et dans ce lieu; la valeur de R est donnée par la relation :

$$R = 6366407^m (1 + 0{,}00164 \cos. 2L).$$

Nous prendrons néanmoins pour valeur constante de g la quantité 9^m8088; l'erreur n'étant au maximum que d'un demi-millième pour notre pays.

II. De la fluidité.

Les fluides, avons-nous dit, se divisent en deux classes, les liquides et les gaz; leur propriété spéciale consiste en ce que leurs molécules jouissent d'une très-grande mobilité les unes par rapport aux autres. La *fluidité parfaite* n'est rien autre que cette mobilité portée à la perfection; on peut la définir par les conditions suivantes : 1° la résistance opposée par les actions moléculaires au glissement relatif, soit de deux tranches ou parties contiguës d'un même fluide, soit d'un fluide sur une paroi ou surface solide; cette résistance, disons-nous, est nulle; 2° tout changement de forme qui laisserait le volume constant et qui, par conséquent, ne produirait aucune variation de distance entre les molécules, s'effectue sans qu'il se produise le moindre travail de la part des réactions moléculaires.

Il n'existe pas, en réalité, de fluide parfait tel que nous venons de le définir. Tous les gaz se rapprochent beaucoup de la perfection comme mobilité; il en est de même de la plupart des liquides employés en pratique. Cependant ils possèdent une *viscosité* qui produit la *cohésion* entre les molécules ainsi que l'*adhérence* de celles-ci aux parois en contact; cette propriété, facile à démontrer par les expériences les plus simples, s'oppose plus ou moins aux disjonctions et déformations provenant du mouvement, et il est indispensable d'en tenir compte dans l'étude de quelques phénomènes et lois de l'hydraulique. Cette nécessité n'existe pas dans l'hydrostatique; toutes les expériences tendent à prouver que les forces produites par la viscosité, c'est-à-dire la cohésion et l'adhérence, deviennent approximativement nulles lorsqu'il est question de fluides à l'état de repos, absolu ou relatif.

Nous traiterons donc, dans l'hydrodynamique, de l'influence de la viscosité et de la possibilité d'en tenir compte.

B. HYDROSTATIQUE.

a. Action des forces extérieures. Premier principe.

Toutes les propriétés des liquides en équilibre reposent sur le principe fondamental de la *transmission d'égale pression*. Il consiste

en ce que les liquides transmettent également, dans tous les sens, les pressions que l'on exerce en l'un quelconque des points de leur surface.

Ce principe, que nous admettons comme un fait d'expérience, peut se démontrer en s'appuyant sur la propriété inhérente aux liquides qui résulte de leur *fluidité*, c'est-à-dire, sur ce que leurs molécules cèdent sans résistance sensible aux efforts qui tendent à leur faire changer de place les unes par rapport aux autres.

D'après le principe de la *transmission d'égale pression*, si, à la surface d'un liquide censé incompressible, l'on exerce une pression p' par centimètre carré, au moyen d'un piston qui glisse hermétiquement, cet effort se transmettra à travers toute la masse fluide et suivant toutes les directions; de sorte que la pression directe p', supportée par une molécule située à l'ouverture, sera supportée aussi, dans tous les sens, par toute autre molécule fluide égale; et cela, à l'intérieur du vase ou sur une de ses parois, ou bien sur tout corps à faces planes qui y serait plongé.

b. Action de la pesanteur. Deuxième principe.

L'action provenant de la pesanteur, c'est-à-dire le poids du liquide, conduit à un deuxième principe relatif aux pressions.

Il résulte de cette action une pression variable d'un endroit à l'autre du liquide; elle est plus grande vers le fond que dans le haut, puisque les molécules inférieures constituent des obstacles qui s'opposent à la chute des molécules supérieures. Il suit de là que cette pression varie proportionnellement à la hauteur du liquide au-dessus du point que l'on considère. Elle est constante pour les points d'un même plan horizontal ou sur une même couche de niveau; mais d'une couche à une autre immédiatement inférieure, elle augmente, sur la même surface, du poids de la première couche; de sorte que les pressions exercées en deux points placés sur une même verticale diffèrent entre elles d'une quantité égale au poids d'une colonne de liquide qui aurait pour base l'unité de surface et pour hauteur la distance entre ces deux points.

Concluons, d'après ce qui précède, que la pression P, résultant de l'action de la gravité sur une masse liquide, est *indépendante de la*

forme du vase qui la contient et ne dépend que de la profondeur Z de l'eau en dessous de sa surface libre.

Il faut donc bien distinguer, dans un liquide en équilibre, la pression résultant d'une action exercée à sa surface et qui se transmet également à toute la masse, de celle qui est occasionnée par la pesanteur et qui est différente pour des masses partielles situées à différentes hauteurs. La variation de cette dernière pression est nécessairement accompagnée d'un changement dans l'intervalle des molécules; et cette inégalité de densité, très-insignifiante quand la masse liquide a peu d'étendue, peut être constatée dans l'eau des mers et des lacs d'une certaine profondeur.

c. Surface libre des liquides pesants.

C'est en vertu des principes de l'*égalité des pressions* que la résultante des forces $\Sigma p'$ et P, qui sollicitent une molécule de la surface d'un liquide, doit être normale à cette surface. En effet, si elle était oblique on pourrait la décomposer en une force normale, qui se transmettrait dans la masse, et une force tangentielle qui ferait glisser les molécules et qui troublerait le repos. Donc, quand ce repos ou cet équilibre existe, la résultante est perpendiculaire au plan de la surface. Réciproquement, nous voyons que la surface des eaux tranquilles est, dans chaque lieu de la terre, sensiblement plane et perpendiculaire à la direction de la gravité, soit dans le même vase, soit dans des vases communiquant entre eux.

d. Pression sur le fond du vase.

La pression sur le fond est, comme nous l'avons dit, indépendante de la forme du vase. Si donc l'on met sur un même plan horizontal plusieurs vases de formes différentes, *abcd*, *mncd*, *rscd* (fig. 1), mais dont les fonds *cd* soient égaux en surface, un même liquide, placé dans ces vases et s'élevant à une hauteur commune *h*, exercera sur leurs fonds des pressions *égales* entre elles.

La pression *p* due à l'action de la pesanteur, c'est-à-dire au poids du liquide en équilibre dans un vase, est proportionnelle à l'intensité *g*

de cette force, à la densité δ de ce liquide, et à la hauteur h qui sépare du niveau supérieur le plan horizontal (en projection si la face est inclinée) où se trouve l'*unité* de surface sur laquelle s'exerce cette pression. D'où :

$$p = g\delta h$$

sur l'unité de surface; si le vase a un fond horizontal (ou en projection) tel que sa surface soit exprimée par a unités, la pression totale P du liquide, sur ce fond, sera :

$$P = g\delta ha$$

expression dans laquelle $\delta = \frac{M}{V}$ ou le rapport de la masse au volume.

Représentant par Δ le poids du mètre cube du liquide, nous aurons :

$$P = \Delta ha$$

Il ne faut pas confondre ici la pression exercée par le liquide sur le fond du vase avec celle que le vase, ainsi chargé, exerce sur le plan horizontal d'appui ou sur son support.

La loi que nous venons de poser présente, pour certains cas, des résultats en apparence contradictoires, et par cela même très-remarquables. En effet, si nous considérons le vase tronconique *abcd* (fig. 1) nous avons, d'une part, pour le poids total Q d'un liquide qui le remplirait, l'expression :

$$Q = \Delta V$$

où V représente le volume du tronc; d'autre part, la pression P exercée sur le fond par le même liquide est :

$$P = \Delta ah = \Delta V'$$

où V′ représente le volume du cylindre *mncd*. Or, comme V′ est plus grand que V, le poids Q du liquide exerce sur le fond une pression résultant uniquement de son poids et cependant supérieure à ce dernier!

Le phénomène est cependant facile à constater par expérience. Un tonneau étant rempli d'eau entièrement, on adapte et on lute à la bonde un tube cylindrique de quelques centimètres de diamètre, dans lequel on verse ensuite de l'eau. Lorsque le niveau supérieur du liquide dans ce tube a atteint quelques mètres, le tonneau crève, absolument comme s'il était surmonté d'un cylindre d'un diamètre égal au sien.

e. Pression d'un vase sur son support.

Cette pression est égale, dans tous les cas, au poids de la matière solide qui compose le vase augmenté de celui du liquide qu'il contient.

f. Résultante des pressions sur le vase.

La masse liquide étant en équilibre dans le vase, il faut en conclure qu'elle éprouve de la part de ce dernier une résistance totale égale et contraire à son poids; or, cette résistance est directement développée par les pressions que le liquide exerce sur les parois; la résultante de ces pressions a donc la même valeur et la même direction que le poids de la masse liquide.

Nous allons démontrer ci-après cette dernière conclusion, comme une conséquence nécessaire des lois énoncées plus haut sur les pressions des liquides pesants; ce qui viendra encore corroborer la vérité de ces lois.

g. Pression sur les parois.

Démontrons d'abord que la pression exercée par le poids du liquide en équilibre sur un élément quelconque ω d'une paroi *plane* du vase est égale au poids d'une colonne liquide qui aurait cet élément superficiel ω pour base, et pour hauteur la distance h de son centre de gravité au niveau supérieur du liquide dans le vase.

Soit donc ω un élément de la paroi inclinée, assez petit pour être considéré comme plan quoiqu'il puisse appartenir à une surface courbe; soit aussi h la distance verticale qui sépare un de ses points de la surface plane supérieure du liquide; cette distance est supposée la même pour tous ces points, la surface ω étant infiniment petite.

La pression P que l'élément considéré éprouvera de dedans en dehors aura pour valeur :

$$p = g\delta\omega h$$

Représentons par α, β, γ, les angles que la direction de cette pression, ou la normale à la paroi à l'endroit de l'élément ω, fait avec trois

axes rectangulaires, dont l'un Z est dirigé dans le sens de la gravité et les deux autres sont pris dans le plan horizontal supérieur ou la surface libre. La pression p peut être remplacée par trois composantes parallèles aux axes des coordonnées, dont les valeurs sont :

$$g\delta\omega h \cos. \alpha$$
$$g\delta\omega h \cos. \beta$$
$$g\delta\omega h \cos. \gamma$$

et si l'on désigne par a, b, c, les projections de l'élément ω sur les plans coordonnés des yz, des zx et des xy, avec lesquels son plan prolongé formerait des angles dièdres égaux à α, β et γ, l'on aura, d'après un théorème relatif aux projections des aires planes :

$$a = \omega \cos. \alpha$$
$$b = \omega \cos. \beta$$
$$c = \omega \cos. \gamma$$

Il en résulte que les trois composantes de la pression exercée sur l'élément ω deviennent :

$$g\delta ah$$
$$g\delta bh$$
$$g\delta ch$$

Si l'on conçoit que pareille décomposition soit faite pour les pressions exercées sur toutes les parties du vase en contact avec le liquide, l'on aura à considérer trois groupes de forces respectivement parallèles aux trois axes et qui sollicitent l'enveloppe solide.

Or la résultante des forces parallèles à l'axe X est nulle; il en est de même pour la résultante du groupe de forces horizontales parallèles à Y (fig. 2).

En effet, si nous considérons le cylindre horizontal qui projette l'élément ω sur le plan des zy, nous voyons qu'il découpe sur la paroi opposée du vase un autre élément ω', de même profondeur h en dessous de la surface libre du liquide, et de même projection A que ω. Il s'ensuit que la composante, parallèle à X, de la pression exercée sur ω' a aussi pour valeur $g\delta ah$; mais, comme elle est dirigée en sens contraire de la composante semblable venant de ω, ces deux forces s'entre-détruisent. Appliquant ce résultat à tous les éléments des parois du vase, l'on en conclut que la sommation de la résultante du groupe considéré se trouve composée d'un nombre pair de termes,

égaux deux à deux et de signe contraire; que cette somme ou résultante est donc nulle.

Pareil raisonnement s'applique au groupe en Y.

Le groupe en Z des forces verticales subsiste donc seul; sa résultante sera par conséquent celle des pressions que le liquide exerce sur les parois de l'enveloppe. Pour la déterminer, considérons le cylindre vertical qui projette l'élément ω sur le plan mn de la surface du liquide; ce cylindre découpe, sur la partie supérieure de la paroi, un autre élément ω'' situé à une profondeur h'; la composante verticale de la pression exercée sur ω'' a pour valeur $g\delta ch'$; et, comme elle est dirigée en sens contraire de la composante $g\delta ch$ correspondant à ω, ces deux forces réunies donnent, dans l'expression de la résultante totale un terme de la forme $g\delta c\,(h—h')$. Or, ce terme doit être regardé comme égal au poids de la colonne liquide comprise dans le cylindre vertical dont ω et ω'' seraient les bases; il suit de là que la résultante cherchée, qui doit contenir autant de termes semblables à $g\delta c\,(h—h')$ que l'on peut imaginer de cylindres verticaux analogues au précédent dans l'intérieur du vase, est égale au poids total de la masse liquide et qu'elle est dirigée dans le sens de la pesanteur.

Une partie des cylindres liquides aboutissant à la surface libre donneraient des termes de la forme $g\delta ch$, le h' étant nul; ce qui ne changerait rien aux raisonnements ni aux résultats obtenus.

Les principes *e* et *f* sont une conséquence logique de la démonstration précédente.

L'expérience vérifie parfaitement les lois que nous venons de développer. En effet, si les composantes horizontales doivent s'entre-détruire mutuellement, il faut conclure qu'en pratiquant sur une paroi une ouverture ω par laquelle le liquide puisse s'échapper, la pression horizontale ωX en ω n'existera plus et ne fera donc plus équilibre à la même force $\omega' X$, due aussi à la pression du liquide; cette composante $\omega' X$ tendra, par suite, à pousser le système entier dans le sens $\omega\omega'$. C'est ce qu'on vérifie par l'appareil appelé *roue à réaction*.

Ce dernier principe explique aussi le mouvement des fusées de guerre.

Cherchons maintenant quelle est la pression exercée par un liquide

sur une étendue finie et déterminée d'une paroi *plane*, verticale ou inclinée.

Supposons deux parties E*np*F et E*st*F (fig. 5) d'une paroi plane rectangulaire; P′ et P″ les pressions totales qu'elles supportent sous l'action du liquide dont le niveau est en CDEF; soit $sE = h''$ et $nE = h'$; soit aussi $np = st = b$.

La pression p sur une bande élémentaire $n'p'$ est, comme nous l'avons vu :

$$p = bdh \times h \times g\delta$$

Nous aurons en intégrant :

$$\Sigma p \text{ ou } P' = g\delta \int_0^{h'} bdh.h$$

$$P' = \frac{1}{2} g\delta b.\ h'^2 = g\delta bh' \times \frac{h'}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (r)$$

De même pour $\Sigma' p$ ou P″ :

$$P'' = \frac{1}{2} g\delta b.\ h''^2 \text{ ou } = g\delta bh'' \times \frac{h''}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (s)$$

D'où l'on tire :

$$P' : P'' = h'^2 : h''^2 \ldots\ldots\ldots (t)$$

Concluons : 1° la pression sur une portion de paroi plane est égale au poids de la colonne liquide qui aurait cette portion pour base, et pour hauteur la distance de son centre de gravité au niveau du liquide.

Ce résultat est donné par la relation (r) ou (s).

2° Les pressions sur des portions d'une même paroi sont entre elles comme les *carrés* des hauteurs respectives du niveau au-dessus de l'horizontale inférieure dans chaque portion considérée.

Cette loi ressort de l'équation (t).

Si la paroi était inclinée, comme en AF′ (fig. 4), les mêmes conclusions subsisteraient.

En effet, supposons encore une bande élémentaire mn, de largeur b et de hauteur dZ, ce Z étant égal à aF′ pour l'élément mn.

Si nous remarquons que $aF' = \frac{ab}{\cos\alpha} = \frac{h}{\cos\alpha}$ nous pourrons poser :

$$p = g\delta b \times dZ \times h = g\delta b \times dZ \times Z \cos\alpha$$

D'où :

$$P = g\delta b \cos. \alpha \int_0^{AF' \text{ ou } H} ZdZ = \frac{1}{2} g\delta b \cos. \alpha \times H^2$$

$$P = \frac{1}{2} g\delta b H \times AF = g\delta b H \times \frac{AF}{2}$$

De même l'on aurait :

$$P' = \frac{1}{2} g\delta b \cos. \alpha \times H'^2$$

$$P'' = \frac{1}{2} g\delta b \cos. \alpha \times H''^2$$

$$P' : P'' = H'^2 : H''^2 = h'^2 : h''^2$$

les h' et h'' étant les projections sur AF des hauteurs H' et H'' de AF'.

Ces résultats, du reste, ont été démontrés en g, les éléments ω et ω' ayant été censés quelconques et inégaux.

h. Principe d'Archimède. Corps plongés.

Lorsqu'on plonge un corps dans un liquide pesant, il éprouve sur sa surface des pressions que l'on pourrait évaluer analytiquement, ainsi que nous l'avons fait dans le théorème g; en effet, il n'y a que des différences de signe entre ces pressions et celles qui s'exercent sur les parois mêmes du vase. L'on trouverait encore que toutes les composantes horizontales des pressions exercées sur le corps s'entre-détruisent; que, par suite, la somme des composantes verticales a pour valeur le poids d'un volume de liquide égal à celui du corps plongé, et que la direction de cette résultante s'exerce de bas en haut.

Concluons que : *un corps plongé perd de son poids le poids du volume d'eau qu'il déplace.*

k. Centre de pression d'une surface plane.

Le *centre de pression* d'une paroi ou d'une surface plane est le point d'application de la résultante des pressions exercées par le liquide sur cette paroi ou cette surface plane.

Le centre de pression d'une surface est toujours *plus bas* que son centre de figure ou de gravité. Cela se conçoit, les pressions allant en

croissant du haut vers le bas proportionnellement aux carrés des hauteurs. Ces centres ne coïncident que pour le cas d'une paroi horizontale.

Pour déterminer la position du centre de pression, il faut chercher la pression *totale* Σp sur la paroi; comme celle-ci est *plane*, toutes les pressions différentielles p sont parallèles entre elles; par suite, il suffit d'égaler le moment de la résultante Σp à la somme des moments des composantes, par rapport au plan horizontal supérieur qui contient le niveau du liquide; l'on en tirera la distance du centre de pression à ce plan.

Pour un *parallélogramme* ou un *rectangle* dont le côté supérieur est à fleur d'eau, le centre de pression se trouve aux $\frac{2}{3}$ de la base supérieure, sur la ligne qui joint les milieux des deux bases horizontales.

Supposons, en effet, une paroi rectangulaire ABCD (fig. 5) pour laquelle BC représente le niveau du liquide, et telle que BA = H et AD = b. Nous avons trouvé en g :

$$p = bdh \times h \times g\delta$$

$$\Sigma p = g\delta b \int_0^H hdh = \frac{1}{2} g\delta b H^2$$

soit x_1 le bras de Σp, c'est-à-dire la distance verticale du centre de pression, par rapport au plan horizontal BC; nous aurons :

$$\frac{1}{2} g\delta b H^2 \times x_1 = g\delta b \int_0^H hdh \times h = \frac{1}{3} g\delta b H^3$$

D'où :

$$x_1 = \frac{2}{3} H.$$

Dans le *triangle* dont la base coïncide avec BC, le centre de pression se trouve au *milieu* de la ligne qui joint le milieu de la base au sommet du triangle.

Si le sommet est en haut, c'est aux *trois quarts* de cette dernière ligne.

l. Équilibre des corps flottants ou plongés.

Quelques auteurs désignent aussi sous le nom de centre de pression le centre de gravité du volume de fluide déplacé par un corps, plongé ou flottant, et non homogène. C'est, en effet, par ce point que passe la résultante des pressions exercées, du bas vers le haut, par le fluide.

Il y a deux conditions d'équilibre instable pour les corps flottants, comme pour ceux qui sont plongés : 1° Le poids du corps doit être égal au poids du fluide déplacé; 2° Le centre de gravité du corps et celui du fluide déplacé doivent se trouver sur une même verticale.

Pour obtenir un équilibre *stable,* il faut une troisième condition, qui est la suivante, pour les corps *plongés :* 3° Le centre de gravité du corps plongé doit être en dessous de celui du fluide déplacé, c'est-à-dire, du centre de pression, et sur la même verticale.

Cette troisième condition détermine bien aussi la stabilité d'équilibre pour les corps *flottants;* seulement, elle n'est pas absolument nécessaire.

En effet, considérons un ellipsoïde de révolution, ou tout autre corps de forme convexe, tel, que deux plans, rectangulaires entre eux et passant par le centre de gravité du solide, le coupent chacun en deux parties symétriques. Si l'axe d'intersection de ces deux plans est vertical, il contient à la fois le centre de gravité et le centre de pression, et le corps flotte en équilibre. Mais, pour que cet équilibre soit *stable*, il faut, et il suffit que, l'une des sections restant verticale et l'autre s'inclinant un peu, la ligne verticale passant par le centre de pression déplacé vienne rencontrer l'axe, maintenant incliné, en un point situé au-dessus du centre de gravité qu'il contient toujours; en effet, cet axe se trouve alors soumis à l'action d'un couple qui tend à le ramener dans son ancienne position. Or, cette condition de stabilité peut être remplie, lors même que le centre de pression serait en dessous du centre de gravité.

Pour exprimer cette condition autrement, nous pouvons dire avec quelques auteurs, qu'il suffit que le centre de gravité du corps flottant soit en dessous du *métacentre*, point situé à la rencontre de la ligne

passant par les deux centres de gravité dans la position d'équilibre, avec la verticale menée par le centre de gravité du nouveau volume de fluide déplacé lorsque l'on vient à écarter un peu le solide de sa première position d'équilibre.

C. HYDRODYNAMIQUE.

L'hydrodynamique, ou science du mouvement des fluides, repose spécialement sur l'appréciation exacte des résistances provenant de la *viscosité*, c'est-à-dire l'*adhérence* et la *cohésion*. Si ces résistances étaient bien connues, les principes de mécanique et les procédés ordinaires de l'analyse suffiraient pour résoudre complétement tous les problèmes de l'hydrodynamique. Malheureusement, l'état de la science et l'incertitude des données d'expériences dont on dispose, ne permettent pas de regarder le grand problème général de la viscosité comme résolu d'une manière tout-à-fait rigoureuse.

Dans les raisonnements qui vont suivre, ainsi que dans l'exposé des propriétés des liquides, nous admettrons provisoirement que ceux-ci sont doués d'une *fluidité parfaite*.

a'. Pression des fluides en mouvement.

Lorsqu'un fluide est en mouvement, il n'en exerce pas moins une certaine pression contre les parois du vase ou réservoir qui le contient. Si l'on désigne par p la pression ou la force que supporte un élément superficiel dont l'aire est ω, le rapport $\frac{p}{\omega}$ sera la pression par unité de surface, *en un point* de la *paroi*, ou sur l'élément de paroi ω, qui est quelconque. Mais, par suite de l'adhérence produite par la viscosité, cette pression ne sera pas normale.

Si l'on considère ensuite un point intérieur m de la masse fluide, et si l'on imagine que le volume de ce point soit limité par une surface quelconque de dimensions infiniment petites, il arrivera que chaque

élément superficiel de la petite surface précitée subira, par unité, la même pression $\frac{p}{\omega}$. Ce fait résulte du principe fondamental de *l'égalité de pression*, l'influence de la viscosité étant négligée.

b'. Mouvement permanent et mouvement varié.

L'on désigne sous le nom de *mouvement permanent* d'un fluide celui dans lequel la *vitesse* en chaque point reste *constante*, en grandeur et en direction, pendant le temps où l'on considère le fluide.

Le *mouvement varié* est celui où la vitesse du fluide change à tout instant, de grandeur et de direction, pour chacun de ses points.

Le *mouvement permanent* a lieu dans presque tous les cas de la pratique; ce sont les phénomènes et les lois de ce mouvement que nous allons rechercher. Les problèmes du *mouvement varié* rentrent spécialement dans le domaine de la mécanique rationnelle.

c'. Parallélisme des tranches.

L'hypothèse du parallélisme des tranches consiste à admettre que, lorsqu'un fluide renfermé dans un vase en sort par un orifice horizontal, placé au fond ou vers la partie inférieure d'une des parois latérales, ce fluide du réservoir peut être considéré comme composé de tranches horizontales infiniment minces qui descendent en demeurant parallèles dans leurs positions successives. Ceci revient à regarder chaque tranche comme composée constamment des mêmes molécules fluides, et à leur supposer une vitesse verticale commune.

Cette hypothèse se rapproche beaucoup de l'observation, pour certains problèmes de l'écoulement des fluides; par exemple, pour les cas d'orifices d'écoulement *très-petits* pratiqués dans une paroi.

Mais elle entraîne encore, dans quelques circonstances, la nécessité d'admettre que la pression, dans le sens du mouvement, est la même pour tous les éléments superficiels d'une même tranche.

Prenons pour exemple particulier le cas de l'écoulement d'un liquide par un orifice placé au fond du vase qui le contient (*fig.* 6). Si l'on suppose le vase transparent et que l'on rende apparent le mouve-

ment des molécules du fluide en y mêlant un corps pulvérulent, de densité à peu près égale, ou mieux, en y produisant de légers précipités chimiques, l'on voit, à l'intérieur et non loin de l'orifice, une convergence notable des filets fluides qui se dirigent vers la sortie, en décrivant des lignes plus ou moins courbes, et qui s'y précipitent d'un mouvement très-accéléré comme sur un centre d'attraction. Par suite de cette accélération de vitesse, la section de la veine se rétrécit depuis l'orifice jusqu'à une petite distance en dehors du réservoir. La veine forme ainsi un tronc de cône ou de pyramide renversé, dont la petite section *mn* se trouve à l'endroit de la plus grande contraction, et que l'on nomme, par suite, *section contractée*.

Après le passage de cette dernière, les points matériels liquides décrivent à peu près les mêmes courbes inverses jusqu'à ce que par l'effet de leur action réciproque et des mouvements imprimés, elles prennent une direction parallèle ou d'autres directions ; dans le premier cas la convergence cesse, et le mouvement se fait à très-peu près par filets parallèles, et, comme la vitesse, en vertu de l'adhérence mutuelle des molécules, tend à devenir la même dans l'étendue de la section normale au filet moyen, l'on est conduit à admettre que le mouvement se fait par tranches vers les sections *a* et *b*.

Un cas particulier se présente dans les orifices *circulaires;* au delà de la *section contractée mn* (*fig.* 6-2°), la veine forme non pas un tronc de cône renversé, mais un cylindre dont la section *mn* serait la base; l'écoulement a lieu comme si, à l'orifice réel, l'on en eût substitué un autre de diamètre *mn*, et qu'il n'y eût pas eu de contraction. L'hypothèse du parallélisme des tranches peut alors être admise, et les molécules arrivées en *mn* ont des vitesses sensiblement parallèles et normales au plan de ladite section.

Mais il n'est pas permis de poser l'hypothèse précitée entre les limites *a* et *b*, lorsque la convergence et la divergence des filets fluides s'étendent jusqu'à une certaine distance en dedans et en dehors du vase.

Pour les cas de parois minces, la divergence est simplement extérieure.

d'. Continuité des fluides.

Il est un autre principe qui semble conforme à l'observation, dans les cas ordinaires de la pratique, et qui consiste à admettre que les molécules des fluides restent contiguës les unes aux autres, de façon à former toujours un ensemble sans lacune, sans interruption. Ce principe est celui de la *continuité des fluides;* il est exact pour les liquides proprement dits et pour des gaz soumis à des variations de pression peu sensibles.

Il résulte de ce principe et de celui de l'incompressibilité, ainsi que de la permanence du mouvement, que, dans un temps donné, il passera par toutes les sections d'un vase le même volume de fluide.

Par suite, si le vase n'est pas d'une section uniforme, les vitesses des différentes sections, ou des tranches, seront en raison inverse des surfaces de ces tranches. Notons, en effet, que dans le *mouvement permanent*, la vitesse V est mesurée par l'espace h parcouru, donc, par les hauteurs des troncs partiels de cône ou de pyramide liquides; ainsi, par exemple, le volume d'un tronc ou d'une tranche de hauteur dh étant bdh, ou bdV, pour avoir, en un lieu quelconque

$$bdV = \text{constante} = b'dV' = b''dV'' \ldots\ldots\ldots \text{ etc.}$$

il faut que l'on ait :

$$b : b' = dV' : dV = p' : p = V' : V$$

Ainsi, pour un vase qui s'élargirait de la base vers le haut (fig. 7), et dont le niveau resterait constant, les vitesses d'une tranche vont en croissant à mesure que cette tranche se rapproche de l'orifice.

Nous pouvons conclure de là que, dans un vase à sections horizontales égales, la pression, en un point quelconque de la masse liquide qui y est contenue, doit être la même que si ce liquide était en repos, c'est-à-dire qu'elle varie suivant la *loi hydrostatique* (voir b). En effet, la vitesse *relative* de deux éléments superposés d'un même filet fluide étant nulle, ces éléments doivent se comporter comme dans l'état d'équilibre. Nous poserons donc :

Première règle. — Lorsque, dans un fluide parfait, chaque molécule possède un mouvement rectiligne et *uniforme*, la pression varie d'un point à l'autre suivant la *loi hydrostatique*.

Lorsque le vase est à sections horizontales décroissant uniformément du haut vers le bas, la vitesse va en augmentant, par des accroissements infiniment petits, d'une tranche à celle qui lui est immédiatement inférieure ; cette dernière tend donc à se soustraire à l'action de la précédente avec l'énergie due à l'accélération différentielle, et la rapidité de cette tendance sera évidemment d'autant plus importante ou plus négligeable que le mouvement du liquide dans le réservoir sera plus accéléré ou plus ralenti. Ainsi, dans ce cas, la pression supportée par un point quelconque de la masse fluide ou des parois sera moindre dans l'état de mouvement qu'à celui du repos.

L'inverse a évidemment lieu dans le mouvement d'un fluide quand le vase a la forme d'un tronc *droit* de cône ou de pyramide.

Nous pouvons déduire de ce qui précède :

Deuxième règle. — Lorsqu'un fluide parfait est animé de mouvements quelconques, mais *très-lents,* l'on peut admettre encore que la pression varie suivant la *loi hydrostatique.*

Cette lenteur est, en effet, une preuve que les forces sont très-près de satisfaire aux équations d'équilibre ; l'évaluation de la pression, par la règle précédente, sera donc une approximation d'autant plus rigoureuse que le mouvement sera plus lent.

Avant d'évaluer la grandeur des diverses pressions dans les fluides en mouvement, nous croyons devoir poser encore les deux règles suivantes :

Troisième règle. — Lorsque les molécules d'un fluide parfait ont des mouvements identiques à ceux qu'elles prendraient sous la seule action des forces extérieures, la pression, dans toute l'étendue du liquide, est constante d'une façon *absolue* si le mouvement est *permanent;* elle est constante, à un *instant déterminé,* dans toute la masse, si le mouvement *varie* avec le temps.

Cette règle peut s'appliquer, avec une grande approximation, au cas d'un liquide pesant homogène, qui s'écoulerait d'un vase, entretenu à niveau constant, par un orifice latéral de dimensions médiocres par rapport à celles du vase, ce liquide obéissant aux lois de la pesanteur. L'on observe alors un jet, dont la forme *parabolique* ne diffère pas sensiblement (dans une certaine étendue) de la trajectoire que suivrait une molécule isolée.

Quatrième règle. — Lorsqu'il existe dans un fluide naturel en mouvement une section S rencontrée normalement par toutes les trajectoires, et que celles-ci sont sensiblement rectilignes aux environs du plan dont il s'agit, la pression varie suivant la *loi hydrostatique,* pour un déplacement de direction quelconque, tracé dans la section S.

Nous reviendrons, du reste, sur ces dernières règles.

e'. Recherche de la pression dans les liquides en mouvement.

La recherche analytique des lois qui régissent les pressions et l'écoulement des fluides s'appuie essentiellement sur deux grands principes de mécanique rationnelle : le *principe des forces vives* et celui de *d'Alembert.*

Il ne nous paraît pas hors d'un sujet aussi important d'entrer dans quelques développements sur les principes qui conduisent à la solution de tous les problèmes de dynamique. Rappelons, à cet effet, certaines notions élémentaires, afin d'établir d'une manière claire et précise l'expression et la portée des principes en question.

1° *Mesure des forces motrices.*

Si l'on désigne par P le poids d'un corps, par V son volume, par M sa masse, l'on a les identités :

$$M = \delta V \quad P = Mg = \delta g V = \Delta V$$

où Δ est la pesanteur spécifique ou le poids du mètre cube du corps considéré; g est l'accélération due à la pesanteur, ou 9, 8098.

Soit F une force d'intensité *constante ; dv* la vitesse qu'elle imprime en un temps dt et v celle qu'elle imprime pendant le temps t; la vitesse produite par la force F sur une masse M en l'*unité* de temps est $\frac{dv}{dt}$, et la quantité du mouvement qu'elle imprime, pendant cette unité de temps, est représentée par $M \frac{dv}{dt}$.

Comme une force constante se mesure par la quantité de mouvement qu'elle imprime en l'unité de temps, et que les quantités de mouvement engendrées pendant des intervalles quelconques, comptés dès

l'origine du mouvement, sont proportionnelles à ces intervalles, il en résulte qu'en désignant par Mv la quantité de mouvement produite par F pendant le temps t, l'on pourra poser :

$$F = M\frac{V}{t} \text{ ou } F = M\frac{dv}{dt}$$

dv étant désigné sous le nom d'*accélération instantanée,* engendrée pendant la durée dt, infiniment petite.

Une force F' *variable* de grandeur et de direction peut être considérée comme constante quant à sa valeur numérique et aux quantités qui en fixent la direction, mais seulement pendant un instant élémentaire quelconque dt de son action. Si donc cette force F' imprime une quantité de mouvement infiniment petite Mdv' pendant l'instant dt qui succède à un temps quelconque de son action, nous aurons la mesure ou l'expression de sa valeur par l'identité :

$$F' = M\frac{dv}{dt}.$$

L'on peut donc tirer la conclusion suivante : une force motrice quelconque, *constante ou variable,* se mesure, à un moment quelconque de son action sur un corps, par le rapport de la quantité de mouvement qu'elle lui imprime, pendant cet instant, à la durée actuelle et infiniment petite de son action.

Ce résultat s'applique aussi bien aux forces *passives* ou *relatives* qu'aux forces actives (d'après Poncelet) ou absolues (d'après Euler). L'on peut donc conclure en particulier, pour la force d'inertie, que : dans le mouvement varié d'une manière quelconque sous l'action d'une force motrice F, la force d'*inertie,* ou la réaction de l'inertie, est constamment égale et contraire à l'action de F, et doit, par suite, se mesurer comme celle-ci par $M\frac{dv}{dt}$.

Cette dernière conclusion n'est rien autre que l'expression du principe fondamental de l'égalité entre l'*action* et la *réaction.*

2° *Principe de vitesses virtuelles.*

C'est le plus général des trois principes au moyen desquels l'on est successivement arrivé à résoudre les problèmes de la *statique.*

Comme l'on peut ramener toutes les questions de la *dynamique* à des considérations d'équilibre, c'est-à-dire à la *statique*, l'utilité du principe précité est sans limites. L'on peut dire que tous les principes généraux que l'on découvrira peut-être encore, dans cette dernière science, ne seront que des expressions différentes pour la forme, mais identiques au fond, avec le principe des vitesses virtuelles.

Lagrange a exposé dans toute son étendue, et démontré à priori, la formule qui est la conséquence de ce principe généralisé, et qui renferme tous les problèmes de l'équilibre. Combinant aussi le principe des vitesses virtuelles avec celui de *d'Alembert*, il a réduit toute la dynamique à une formule générale, de laquelle il a déduit les principes des *forces vives*, des aires ou de la conservation des moments de rotation, de la moindre action ou du repos, de la conservation du mouvement du centre de gravité, etc.

L'on entend par *vitesse virtuelle* celle qu'un corps en équilibre prendrait, pendant le premier instant *dt*, du mouvement qui succèderait à cet état d'équilibre censé subitement rompu.

L'énoncé le plus simple et le plus particulier du principe des vitesses virtuelles, peut s'énoncer comme suit :

Lorsqu'un corps est sollicité par différentes forces F, F′, F″..., etc., *il y aura équilibre entre* F, F′, F″..., etc., *quand elles seront en raison inverse de leurs vitesses virtuelles, estimées suivant les directions de ces forces.*

Cet aperçu particulier du principe des vitesses virtuelles remonte à 1577; *Guido Ubaldi* le reconnut dans le levier et dans les poulies mobiles; l'on voit, en effet, directement dans ces machines que, pour les états d'équilibre, la puissance et la résistance sont toujours en raison inverse des espaces parcourus par les points d'application, dans le même temps. *Galilée*, en 1634 (mécaniques), *Wallis*, en 1669 (*mécanique*), appliquèrent cette loi au plan incliné, puis aux principales machines. Elle fut ensuite présentée sous d'autres aspects par *Descartes* et *Toricelli*.

En 1717, *Jean Bernouilli* généralisa le principe et l'employa dans la résolution de tous les problèmes de la statique.

C'est aussi la loi des vitesses virtuelles qui produisit le principe de la *moindre action*, présenté par *Maupertuis*, en 1740, sous le nom

de *loi du repos,* et qui, au point de vue de la métaphysique des *causes finales*, est l'expression symbolique de l'harmonie universelle, c'est-à-dire de la Providence divine. Attaqué par *Lagrange* et défendu par *Euler*, le principe de *Maupertuis* a été victorieusement démontré, de nos jours, par l'illustre géomètre *Jacobi* de Kœnigsberg.

La généralisation du principe des vitesses virtuelles par *Jean Bernouilli,* conduit à l'énoncé suivant :

Si un système quelconque de corps ou de points matériels, sollicités chacun par un nombre quelconque de forces F, F′, F″..., etc., est en équilibre, et si l'on imprime alors à ce système un petit mouvement quelconque, en vertu duquel chaque point décrive un chemin infiniment petit qui exprimera sa vitesse virtuelle, *la somme des puissances* multipliées, chacune, par le chemin que parcourt son point d'application, suivant sa direction, *est toujours égale à zéro,* en regardant comme positifs les espaces infiniment petits parcourus dans le sens de ces puissances, et comme négatifs ceux qui sont décrits en sens opposés.

Ce sont les conséquences de ce principe ainsi étendu qui ont été développées par *Lagrange* dans sa formule générale.

3° *Principe des forces vives, ou de la conservation des forces, ou principe des quantités d'action finies.*

Supposons qu'un corps de masse m soit sollicité par un certain nombre de forces quelconques F, F′, F″..., etc., dont la résultante soit représentée par R.

Si l'on considère l'action de R pendant un instant quelconque, mais infiniment petit, dt, qui succède au temps t du mouvement, varié ou permanent, l'on peut poser, ainsi qu'il a été dit :

$$R = m \frac{dv}{dt}$$

$$de = vdt$$

$$Rde = m. \frac{dv}{dt} . vdt = mvdv$$

où dv est l'accélération instantanée produite par R, et de le chemin parcouru dans le sens de cette résultante ou la *vitesse virtuelle* du corps.

Représentant par dp, dq..., etc., les projections du chemin élémentaire de sur les directions de F, F′, F″..., l'on aura aussi :

$$Fdp + F'dq + \ldots\ldots\ldots \text{ etc.} = Rde = mvdv \ldots\ldots\ldots (m)$$

et par suite :

$$\int Fdp + \int F'dq + \ldots\ldots\ldots \text{ etc.} = \int Rde = \frac{1}{2}\, mv^2 \ldots\ldots\ldots (n)$$

ce qui signifie :

1° (Équation m). La somme des quantités d'action *instantanées* de plusieurs forces accélératrices est égale à *l'accroissement* de force vive symbolique correspondant.

2° (Équation n). *La quantité d'action finie* fournie par plusieurs forces accélératrices, en un temps donné (pour vaincre l'inertie de la matière et accélérer le mouvement), est égale à la moitié du produit de la masse du corps sollicité par le carré de la vitesse totale imprimée pendant ce temps, ou bien, à la *moitié de la force vive gagnée.*

L'on a supposé plus haut que les quantités d'action étaient comptées à partir de l'instant où le corps commençait à se mouvoir, c'est-à-dire dès l'origine du mouvement. Mais si l'on suppose que le corps avait déjà une vitesse v', il faudrait intégrer entre les limites v' et v'' au lieu de o et v; de là l'équation :

$$\int Fdp + \int F'dq + \ldots\ldots\ldots \text{ etc.} = \frac{1}{2}\, m\,(v''^2 - v'^2)$$

Cette loi des *forces vives* s'applique aussi au cas des mobiles qui, au lieu de pouvoir céder librement à l'action simultanée des forces sollicitantes, sont assujettis à un point fixe, à une ligne, à un canal matériel, d'où ils ne puissent s'échapper. Elle est donc vraie pour le mouvement de rotation. Aussi, doit-elle son origine à la recherche de ce fameux problème du *centre d'oscillation,* c'est-à-dire d'un point pris sur un pendule composé, et tel que sa distance à l'axe de suspension soit la longueur du pendule simple correspondant.

Huygens, le premier, a déterminé ce point en se fondant sur ce principe que : si plusieurs poids, attachés indifféremment à un pendule, descendent par la seule action de la pesanteur, et si, à un mo-

ment quelconque, ils sont détachés et séparés tout à coup les uns des autres, chacun d'eux, en vertu de la vitesse acquise pendant sa chute, remontera à une hauteur telle que le centre de gravité général se trouvera relevé à la même hauteur que celle de laquelle il est descendu. Autrement dit : la somme des produits des masses par les carrés des vitesses est la même, à un instant quelconque, soit que les masses se meuvent conjointement, soit qu'elles parcourent librement les mêmes hauteurs verticales; de là le nom de principe de la *conservation des forces vives.*

Ce principe, tel que Huygens l'avait trouvé et appliqué, fut longtemps employé seul pour la solution des problèmes de dynamique. Mais, comme il ne donne qu'une équation, l'on cherchait à établir les autres relations nécessaires, par certaines hypothèses plus ou moins exactes, sur la valeur et l'action de forces inconnues avec lesquelles l'on concevait que les corps devaient se pousser ou se tirer; de là des solutions souvent très-difficiles et parfois peu rigoureuses.

Adoptant le système de *Descartes,* qui proposa le premier de mesurer les forces par leur *quantité de mouvement* mv, *Jacques Bernouilli* donna, en 1691 d'abord, puis, beaucoup plus complétement en 1703, la solution du problème du *centre d'oscillation;* il était parti de l'ingénieuse idée suivante.

Dans un corps soumis au mouvement varié, le produit *mdv* de la masse par l'accélération exprime ou mesure la *force motrice* nécessaire pour imprimer la vitesse élémentaire que le corps a prise ou qu'il tend à prendre. Des forces motrices ou des quantités de mouvement se détruiront ou se feront équilibre si elles sont égales et directement opposées, ou bien si, étant appliquées à un système quelconque matériel en équilibre, elles suivent les lois de l'équilibre de ce système.

Par suite, si l'on considère les mouvements que la pesanteur imprime à tout instant aux molécules d'un pendule composé, comme ces molécules, en vertu de leur liaison ou cohésion, ne peuvent suivre ces mouvements, l'on peut concevoir les mouvements qu'elles prendront comme résultant des mouvements imprimés et d'autres mouvements ajoutés ou retranchés qui doivent se faire équilibre au moyen des liaisons du système.

Ici encore le problème du mouvement se trouve ramené à une question de statique.

4° *Principe de d'Alembert.*

La méthode de *d'Alembert*, pour mettre en équation tous les problèmes de dynamique, n'est que l'extension de l'idée de *Jacques Bernouilli* indiquée plus haut.

Si l'on suppose qu'un système quelconque de corps ou de points matériels, solidaires entre eux, sont en mouvement sous l'action d'un certain nombre de forces sollicitantes extérieures, il est évident que chaque point du système prendra, à chaque instant, un accroissement de vitesse différent en grandeur et en direction de celui qu'il prendrait s'il était libre, c'est-à-dire dégagé de toute liaison avec le restant du système, et qu'il pût céder entièrement à l'action médiate ou immédiate de la pression totale qui lui est transmise en réalité pendant chaque instant. Il y a donc, pendant chaque élément dt du temps, une certaine quantité de mouvement mdv, $m'dv'$..., etc., perdue par chacune des parties; par conséquent, les mouvements détruits doivent être tels que les corps animés de ces seuls mouvements se fassent équilibre. De là le principe de d'Alembert :

Si l'on imprime à un système de corps une série de mouvements que ces corps soient forcés de modifier à cause de leur action ou liaison mutuelle, *il y a équilibre entre les forces qui correspondent aux quantités de mouvement perdues pendant chaque élément de temps.*

Mais la quantité de mouvement instantanée, imprimée à l'un des points matériel du système, n'étant rien autre que la résultante de la quantité de mouvement effective de ce point et de la quantité de mouvement perdue, il est évident que cette dernière peut, à son tour, être considérée comme la résultante de la première et de la deuxième qui serait prise en sens contraire de sa direction. L'on peut donc énoncer comme suit le principe :

Quand un système de corps ou de points matériels est en mouvement sous l'action de plusieurs forces sollicitantes quelconques, il y a, en tout instant, équilibre entre les quantités de mouvement imprimées réellement, ou plutôt, entre les forces réellement appliquées au

système et celles qui produiraient les mouvements engendrés effectivement dans le cas où tous les points du système seraient libres; seulement ces dernières doivent être prises en sens contraire.

Il est aisé de prouver que le principe de d'Alembert n'est qu'une extension donnée à l'ancien principe de *l'équilibre entre l'action et la réaction*. Quoi qu'il en soit, le traité de dynamique de d'Alembert, qui parut en 1743, fournit une méthode générale pour mettre en équations tous les problèmes du mouvement; et, comme nous l'avons dit, c'est en combinant le principe de d'Alembert avec celui des vitesses virtuelles que Lagrange a réduit toute la dynamique à une formule générale.

Recherche de la pression; théorème de Daniel Bernoulli.

Supposons un fluide pesant et homogène en mouvement dans un vase (fig. 7) à niveau constant AB et à sections horizontales qui décroissent du haut vers le bas. Considérons une portion ABCD de la masse fluide telle que la section CD soit au-dessus de la limite du parallélisme des tranches (voir en C′). Supposons aussi que l'orifice d'écoulement soit pratiqué en K, à la partie inférieure, et que la permanence du mouvement soit établie.

Soit S la surface de la section AB;

S′ celle de CD;

σ celle de *ab*;

la section *ab* étant prise à l'endroit où la veine cesse d'être contractée et où le parallélisme des filets peut s'admettre comme rétabli.

Soient encore : V, V′, U, les vitesses moyennes des sections AB, CD et *ab*.

H et H′ les hauteurs verticales de ces sections au-dessus d'un plan horizontal *ef*.

δ la densité du fluide $= \frac{M}{V}$ le rapport de la masse au volume.

Δ le poids δg de l'unité de volume du fluide.

M la masse ABCD $= V\delta$.

P la pression, en kilogrammes, sur l'unité de surface de S ou AB (soit par l'air soit par toute autre force).

p la pression, en kilogrammes, sur l'unité de surface, exercée sur σ ou ab, par une force extérieure verticale, agissant de bas en haut (l'air ou toute autre force).

P' la pression, en kilogrammes, par unité de surface, supportée par un point quelconque d'une des parois ou de la masse fluide en mouvement.

ψ l'augmentation ou la diminution (ici c'est une diminution) de pression d'une tranche à une autre, provenant du mouvement du fluide dans un vase à sections inégales.

D'après ce que nous avons vu en hydrostatique, la pression P' en un point quelconque situé dans le plan horizontal CD, soit de la paroi, soit de la tranche fluide, doit être représentée par l'expression suivante :

$$P' = P + \Delta (H - H') - \psi - p$$

Supposons que la masse ABCD descende en A'B'C'D' pendant l'instant dt; la section AB aura fait le chemin élémentaire AA' ou $dH = Vdt$, et CD aura décrit $dH' = V'dt$. Si nous désignons par dM, dM', dM''..., etc., la masse des diverses tranches, elles auront pour valeur, soit : $dM = \delta S dH = \delta S V dt$; ou bien $dM' = \delta S' dH = \delta S' V' dt$; ou encore $dM'' = \delta\sigma U dt$. Mais comme les mêmes masses doivent passer en un même temps, l'on ne peut pas attribuer aux tranches des épaisseurs élémentaires arbitraires : il faut les prendre proportionnelles à leurs vitesses ou en raison inverse de leur section; par suite :

$$dM = dM' = dM'' \ldots\ldots\ldots = \delta S V dt = \delta S' V' dt = \delta\sigma U dt$$

et $\frac{dM}{S'}$ exprimera la masse partielle ayant l'unité de surface pour base et dH' pour hauteur, et appartenant à la tranche $(\overline{CD, C'D'})$ ou à celle qui se trouve immédiatement en dessous ou au-dessus.

Appelons momentanément $d\mu$ la masse élémentaire de la tranche située au-dessus de $(\overline{CD, C'D'})$ et $d\mu'$ la masse de $(\overline{CD, C'D})$; ces dénominations ne devant servir que pour mieux distinguer la différence de position de ces deux masses. La dernière $d\mu'$ descend avec une vitesse V' pendant l'instant dt, et a, sur la première $d\mu$ un excédant de vitesse dV'; la quantité de mouvement élémentaire due à cet excé-

dant est $d\mu'.dV'$, et la force élémentaire $d\psi$ capable d'engendrer cette quantité $d\mu'.dV'$ pendant le temps dt, a pour mesure :

$$d\psi = d\mu' \frac{dV'}{dt}$$

nous disons : $d\mu'$ et non dM, toutes les notations se rapportant à l'unité de surface ou de volume.

Ainsi :

$$d\psi = d\mu' \frac{dV'}{dt} = \frac{dM}{S'} \times \frac{dV'}{dt} = \delta V' d'V' \ldots\ldots\ldots (a)$$

L'intégration donne :

$$\psi = \frac{1}{2} \delta V'^2 + C \text{ ou constante } \ldots\ldots\ldots (a')$$

Pour déterminer la constante, remarquons qu'à la surface du fluide la variation de pression due au mouvement peut être considérée comme nulle ; en effet, l'on peut concevoir que le liquide affluent qui maintient le niveau y arrive avec une vitesse V égale à celle de AB ; l'on aura donc $\psi =$ zéro pour $V' = V$, d'où :

$$o = \frac{1}{2} \delta V^2 + C$$

$$C = -\frac{1}{2} \delta V^2$$

$$\psi = \frac{1}{2} \delta (V'^2 - V^2)$$

Et, par suite, la pression P' sur l'unité de surface :

$$P' = P + \Delta (H - H') - \frac{1}{2} \delta (V'^2 - V^2) - p$$

Si l'on suppose le vase à l'air libre, alors $P = p$ et l'équation devient :

$$P' = \Delta (H - H') - \frac{1}{2} \delta (V'^2 - V^2) \ldots\ldots\ldots (o)$$

Il suffit d'une légère transformation de l'équation (o) pour avoir l'expression du théorème de Daniel Bernouilli. Posons à cet effet :

$$V^2 = 2gH \text{ et } V'^2 = 2gH'$$

$$\frac{1}{2} \delta (V'^2 - V^2) = \delta g (H - H') = \Delta (H - H')$$

D'où nous concluons :

Théorème. Lorsqu'une masse fluide est en mouvement dans un

vase placé dans un milieu homogène, la pression sur une tranche quelconque est égale à celle qui aurait lieu à l'état d'équilibre, diminuée ou augmentée de la pression que produirait une colonne du fluide d'une hauteur due à l'accroissement de vitesse qui a lieu de la tranche supérieure à celle que l'on considère.

Il est facile de voir, d'après l'équation (o), que, si le mouvement est très-lent dans le vase, ainsi que cela se présente toujours quand *l'orifice d'écoulement est très-petit*, par rapport aux sections horizontales du réservoir, l'on peut négliger le terme ψ, c'est-à-dire l'excédant de pression dû au mouvement dans un vase de forme tronconique ou plus généralement de forme irrégulière. Dans ce cas, comme pour celui d'un vase à section constante, cet excédant devient nul; seulement, dans le vase à section constante, le terme disparaît toujours quelle que soit la vitesse absolue et commune des tranches fluides.

Nous aurons donc, comme cas particulier :

$$P' = \Delta (H - H')$$

Ou bien, appelant h la différence $H - H'$:

$$P' = \Delta h$$

ce qui n'est autre que la *loi hydrostatique* développée en b, et qui est due à la pesanteur.

Le théorème de D. Bernouilli se rapporte au cas d'un fluide pesant et homogène; l'équation qui en résulte est donc particulière. L'on peut, en effet, la déduire du cas le plus général en introduisant quelques hypothèses dans cette dernière (1).

f'. Équations générales du mouvement d'un fluide parfait.

Si nous rapportons le mouvement à trois axes rectangulaires des coordonnées en x, y et z, il sera complétement déterminé lorsqu'on connaîtra, à tout instant, pour un point quelconque : 1° les trois composantes u, v, w, parallèles aux axes des coordonnées, de la vitesse V propre à la molécule de ce point; 2° la pression p et la densité δ du fluide.

(1) Lagrange, *Mécanique analytique*, seconde partie, section X.

Les quantités u, v, w, p, δ sont des fonctions de x, y, z, du point auquel elles se rapportent ainsi que du temps t; car, d'un côté, à une même époque elles changent d'un point à un autre; d'autre part, pour le même point de l'espace, elles varient avec le temps. La résolution du problème exige donc cinq équations en u, v, w, p et δ.

Représentant par dm un élément de masse, et par X, Y, Z des fonctions *connues* de x, y, z, t, l'on pourra désigner par Xdm, Ydm, Zdm, l'ensemble des composantes parallèles aux axes des coordonnées et provenant de la décomposition des forces qui produisent le mouvement.

La masse d'un point quelconque du fluide étant $\delta dxdydz$, si l'on cherche la valeur de l'accélération imprimée à ce point par les forces sollicitantes, l'on trouve que les trois composantes de cette accélération ou les projections de celle-ci sur les axes des coordonnées sont :

$$X - \frac{1}{\delta} \frac{dp}{dx}$$

$$Y - \frac{1}{\delta} \frac{dp}{dy}$$

$$Z - \frac{1}{\delta} \frac{dp}{dz}$$

Remarquant ensuite, qu'après un temps dt, les coordonnées x, y, z, du point ou de la molécule sont devenues $x + udt$, $y + vdt$, $y + wdt$; comme u est une fonction de x, y, z, t, son accroissement ou sa dérivée répondant aux accroissements udt, vdt, wdt, dt, des quatre variables indépendantes, aura pour expression :

$$\frac{du}{dx} . udt + \frac{du}{dy} . vdt + \frac{du}{dz} . wdt + \frac{du}{dt} . dt$$

Or, cette quantité est l'accroissement de la vitesse u projetée sur l'axe des x, après un temps dt, la molécule suivant sa *trajectoire*. Divisant cette quantité par dt l'on aura la projection sur l'axe des x de l'accélération de cette molécule. Égalant les deux expressions de cette composante, l'on obtient une première équation :

$$X - \frac{1}{\delta} \frac{dp}{dx} = u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} + \frac{du}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

L'on aurait de même pour les composantes en y et en z :

$$Y - \frac{1}{\delta}\frac{dp}{dy} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz} + \frac{dv}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$Z - \frac{1}{\delta}\frac{dp}{dz} = u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz} + \frac{dw}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Ces trois équations entre les cinq inconnues u, v, w, p, δ et leurs dérivées partielles sont les mêmes pour les fluides compressibles et pour les fluides qui ne le sont pas.

Reste à établir deux autres équations entre ces inconnues.

L'on détermine la quatrième équation par la condition qu'il ne se forme pas de vide dans le liquide en mouvement, c'est-à-dire qu'il y ait continuité, de façon que la masse contenue dans un volume soit toujours égale au produit du volume par la densité; aussi l'a-t-on désignée sous le nom d'équation de *continuité*. Égalant encore les deux expressions de l'accélération de vitesse d'une masse élémentaire, l'on obtient :

$$-dxdydzdt\left(\frac{d.\,\delta u}{dx} + \frac{d.\,\delta v}{dy} + \frac{d.\,\delta w}{dz}\right) = \frac{d\delta}{dt}\,dtdxdydz$$

Ou bien :

$$\frac{d.\,\delta u}{dx} + \frac{d.\,\delta v}{dy} + \frac{d.\,\delta w}{dz} + \frac{d\delta}{dt} = o \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Cette équation est encore applicable aux liquides comme aux gaz.

Quand il s'agit des liquides, elle se dédouble en deux autres relations, par l'hypothèse d'une incompressibilité théorique absolue; dans ce cas δ ne varie pas pour une molécule le long de sa trajectoire, c'est-à-dire $d\delta$ est nul; et l'on obtient, entre les inconnues et leurs dérivées, deux équations supplémentaires :

$$u\frac{d\delta}{dx} + v\frac{d\delta}{dy} + w\frac{d\delta}{dz} + \frac{d\delta}{dt} = o \quad \ldots\ldots\ldots (4\text{ bis})$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = o \quad \ldots\ldots (5)$$

Lorsqu'il s'agit de fluides gazeux, l'on ajoute aux équations (1) (2) (3) (4) une cinquième équation de condition entre la densité, la pression et la température, conformément aux lois de *Mariotte* et de

Gay-Lussac. Cette relation, pour un gaz à température *constante*, est

$$\delta = Kp \text{ ou } \frac{\delta}{p} = \text{constante} \ldots\ldots\ldots \text{ (5 bis)}$$

la densité est proportionnelle à la pression.

Pour un gaz à température *variable*, elle devient :

$$\delta = \frac{K'p}{1 + \alpha\theta}$$

où K et K' sont des constantes; α le coefficient de dilatation, et θ la température.

Mais ici une sixième équation deviendrait nécessaire, à cause de la nouvelle variable θ.

Malheureusement, l'on n'est parvenu que pour des cas très-limités à intégrer les équations différentielles précitées; il a été impossible jusqu'à présent de déterminer, d'une façon générale, les fonctions arbitraires introduites par l'intégration.

Par suite, il devient nécessaire d'admettre quelques hypothèses restrictives au moyen desquelles l'intégration soit possible. L'on arrive ainsi aux deux théorèmes suivants :

I. *Équation du mouvement permanent d'un fluide.*

La première hypothèse que nous poserons sera celle d'un mouvement *permanent ;* c'est-à-dire, qu'en un lieu déterminé de l'espace, le fluide présente toujours le même phénomène; ou bien que u, v, w, p, δ, tout en variant, à un même moment, avec les coordonnées x, y, z, du point auquel elles se rapportent, soient cependant constantes quand le temps t varie, x, y, z ne variant pas.

D'où :

$$\frac{du}{dt} = o \quad \frac{dv}{dt} = o \quad \frac{dw}{dt} = o \quad \frac{dp}{dt} = o \quad \frac{d\delta}{dt} = o$$

Par une seconde hypothèse, nous admettons que $Xdx + Yy\,d + Zdz$ soit la différentielle *exacte* d'une certaine fonction φ de x, y, z ; ou bien :

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\varphi$$

Ces deux conditions admises, en égalant encore deux expressions de l'accélération, l'on arrive à l'équation suivante :

$$d\varphi - \frac{dp}{d\delta} = VdV \text{ ..... } (m)$$

les différentielles $d\varphi$, dp, dV étant celles qui répondent à un déplacement élémentaire ds sur la trajectoire de la molécule.

Pour intégrer facilement l'équation (m), nous admettrons une troisième hypothèse : c'est que le fluide soit un liquide *homogène* ou bien un gaz à *température constante*.

Dans ces deux cas, δ est un nombre invariable; par suite, l'on obtient en intégrant :

$$\varphi - \frac{p}{\delta} - \frac{1}{2} V^2 = C \text{ ou constante ..... } (m')$$

Pour le cas d'un gaz à température constante, il suffira de poser $\delta = mp$ où m est une constante; l'on aura donc l'équation :

$$\varphi - \frac{1}{m} \log. \text{hyp. } p - \frac{1}{2} V^2 = C \text{ ou constante ..... } (m'')$$

Il faut bien remarquer que les équations (m') et (m'') ne sont démontrées que par une suite de points par lesquels doit passer une même molécule, prise du reste arbitrairement. Elles peuvent donc être très-utiles pour le cas où la forme des trajectoires serait connue d'avance.

II. *Équation du mouvement permanent dans le cas d'un fluide homogène et pesant. Théorème de D. Bernouilli.*

C'est admettre que la *pesanteur* seule reste en jeu, et que les composantes X et Y soient nulles. D'où :

$$X = o \quad Y = o \quad Z = g$$

La fonction $\varphi(xyz)$ se réduit à $\varphi(z) = gz$. Soit Δ le poids de l'unité de volume du fluide ou δg; l'équation (m') devient :

$$gz - g\frac{p}{\Delta} - \frac{1}{2} V^2 = C'$$

$$z - \frac{p}{\Delta} - \frac{V^2}{2g} = C \text{ ..... } (n)$$

C'est dans la propriété exprimée par l'équation (n) que réside le

théorème de D. Bernouilli ; la forme seule en est changée et peut s'énoncer comme suit :

Si, pour divers points d'un fluide en mouvement permanent, tous situés sur la trajectoire d'une même molécule, l'on prend la hauteur en dessous d'un plan horizontal fixe, d'une part, et la hauteur représentative de la pression, *plus* la hauteur due à la vitesse, d'autre part, *la différence sera une quantité constante.*

Pour un gaz à température constante, l'on doit faire $\varphi = gz$ dans l'équation (m'').

III. *Équation du mouvement permanent d'un fluide quelconque en y introduisant l'action de la viscosité.*

Appelons ψ' l'accélération de vitesse imprimée à une molécule par les forces *inconnues* qui proviennent de la *viscosité*. Soit ω l'angle que fait la résultante de ces forces avec l'élément ds parcouru sur la trajectoire ; le travail de ψ' dans le déplacement ds sera $\psi' \cos \omega . ds$.

L'équation (m) devient ici :

$$VdV = d\varphi - \frac{1}{\delta} dp + \psi' \cos \omega . ds \text{ ..... } (m''')$$

Intégrant entre deux positions quelconques d'une même molécule :

$$\varphi - \int \frac{dp}{\delta} + \int \psi' \cos. \omega . ds - \frac{1}{2} V^2 = C \text{ ..... } (n')$$

L'équation (n') peut être considérée comme l'expression du théorème de D. Bernouilli, généralisé par l'introduction de ψ' et par une hypothèse plus étendue quant à la nature des forces extérieures qui sollicitent le fluide en mouvement.

Si l'on introduit de même l'action de la viscosité dans l'équation (a) que nous avons établie, page 42, pour la démonstration *à priori* du théorème précité, l'on obtient :

$$d\psi = d\mu' \frac{dV'}{dt} + \psi' \cos. \omega . ds \text{ ..... } (a'')$$

qui devient par intégration :

$$\psi = \frac{1}{2} \delta V'^2 + \int \psi' \cos \omega . ds + C \text{ ..... } (a''')$$

L'équation (a''') représente alors le théorème de D. Bernouilli, rendu plus complet par l'introduction d'une nouvelle force, la viscosité, dont l'action, variable avec la nature des liquides, n'en est pas moins réelle.

L'on pourra se servir des équations (n') et (a''') lorsque, par un procédé quelconque, l'on parviendra à évaluer le terme $\int \psi' \cos \omega . ds$ représentant le travail fait par les forces provenant de la viscosité, pendant le déplacement fini d'une molécule.

Pour le cas du théorème actuel, c'est-à-dire d'un liquide *pesant* et homogène, l'équation (n') devient :

$$z - \frac{p}{\Delta} + \frac{1}{g} \int \psi' \cos. \omega . ds - \frac{V^2}{2g} = C \text{ ..... } (p)$$

et pour un gaz à température constante :

$$z - \frac{1}{mg} \log. \text{hyp.} p. + \frac{1}{g} \int \psi' \cos. \omega . ds - \frac{V^2}{2g} = C$$

g'. De la viscosité; aperçu critique de quelques théories.

Un grand nombre d'auteurs se sont occupés de la question si complexe de la viscosité; tels sont : Newton, Coulomb, Dubuat, Girard, De Prony, D'Aubuisson, Eytelwein, Poncelet, Navier, Sonnet, Dupuit, Génieys, Belanger et D'Arcy. Diverses idées émises ou expériences faites par les savants précités ont servi de point de départ aux théories remarquables de Navier, De Prony, Sonnet, Dupuit, D'Arcy, etc.

Newton posa en principe que la viscosité développe entre deux molécules une force mutuelle f proportionnelle à la vitesse avec laquelle ces deux molécules s'écartent l'une de l'autre.

Partant de là, il fut admis que, vu la distance excessivement petite à laquelle deux molécules fluides agissent l'une sur l'autre, en vertu de la loi de continuité, ces deux molécules ont nécessairement des vitesses très-peu différentes; que, par suite, la vitesse avec laquelle elles se séparent est encore plus faible et qu'elle est due à la différence des deux précédentes. Appelant v la vitesse, *censée finie*, avec laquelle se séparent deux molécules fluides, l'on peut représenter f par F (v)

une certaine fonction où v est considérée comme la variable. Mais, outre cette hypothèse de $v =$ à une quantité finie, l'on admit, comme force de même nature et de même origine, celle qui est développée par la viscosité entre une molécule fluide et la molécule solide de la paroi du vase ou du conduit; et l'on représenta par une fonction $\varphi(v)$ la force complète produite par les deux résistances. Développant $\varphi(v)$ en série, suivant les puissances de sa variable v, l'on obtint :

$$\varphi(v) = A + Bv + Cv^2 + Dv^3 \ldots\ldots\ldots + v^n$$

Comme les expériences tendent à prouver que $\varphi(v)$ est presque nul quand $v = o$, l'on posa plus simplement :

$$\varphi(v) = Bv + Cv^2 \ldots\ldots\ldots (o)$$

négligeant aussi les termes où le degré de la variable est supérieur à 2.

Afin de légitimer l'hypothèse par laquelle l'expression (o) doit représenter l'ensemble des 2 résistances produites par la viscosité, l'on admit en principe qu'il existe une couche d'eau, inhérente aux parois, d'une vitesse nulle, et sur laquelle glisserait la couche suivante, avec une vitesse finie; ces dernières formeraient alors la vitesse réelle du fond dans les canaux découverts ou celle de la circonférence $2\pi R$ dans un tuyau de rayon R.

Ces hypothèses, toutes gratuites et inadmissibles, conduisirent fatalement à la nécessité d'admettre une conséquence qui est loin d'être démontrée : c'est que l'eau éprouve la même résistance de la part d'une paroi quelconque, puisqu'elle ne glisse jamais que sur de l'eau et non sur les aspérités d'un solide.

Cependant, de tels principes servirent de guides à plusieurs savants dans leurs études sur les lois de l'hydrodynamique. Ainsi, Dubuat n'ayant trouvé aucune variation dans le frottement, pour les différents cas où l'eau coulait sur du verre, du bois, du fer, du plomb, de l'étain et diverses espèces de terres, ce fait est expliqué, de la part du classique D'Aubuisson, par l'observation que, dans tous les cas, le frottement n'a lieu que sur la couche aqueuse qui revêt la paroi du lit. Autre part encore, ce dernier auteur considère les masses fluides comme s'écoulant contre un revêtement ou enduit aqueux fixé contre les parois des tuyaux ou des canaux découverts.

S'appuyant sur des idées émises par Coulomb, un autre savant,

M. Girard, admit d'abord, comme tant d'autres, que l'eau glisse sur la paroi mouillée, ou plutôt sur la couche d'eau adhérente; considérant alors que le mouvement de cette eau est d'abord retardé par la viscosité qui tend à la retenir sur cette couche liquide (c'est notre *cohésion*), il en conclut une première force retardatrice proportionnelle à la vitesse. Mais, outre la viscosité, dont l'effet, disait-il, est indépendant des aspérités de la paroi, il faut encore tenir compte d'une autre force retardatrice, produite par ces aspérités, et qui est analogue à celle du *frottement* dû à la nature de la paroi et variable avec elle, mais différente cependant des forces de frottement en général en ce que la deuxième résistance en question n'est pas, comme ces dernières forces, variable avec la pression. Cette résistance ou ce frottement suivrait, d'après M. Girard, pendant un temps donné, la raison composée de la force et du nombre des impulsions que reçoivent les aspérités, ce qui la rendrait proportionnelle au carré de la vitesse.

La première hypothèse de M. Girard est fausse; la seconde ne s'éloigne guère de la vérité, mais pour sa conclusion seulement.

D'après ces notions, bien arbitraires, posées par Dubuat, Girard, Coulomb, D'Aubuisson, etc., l'on a admis que la formule (o) :

$$\varphi(v) = Bv + Cv^2$$

était une loi naturelle, que le terme en Bv représentait la résistance engendrée par la cohésion, et Cv celle qui est produite par l'adhérence à la paroi solide. (Voir D'Aubuisson.) Dès lors on considéra les deux coefficients B et C comme deux quantités constantes, variables avec la nature du fluide, mais indépendantes de celle des parois et faciles à déterminer par des expériences.

L'un des savants qui ont imprimé le plus de progrès à la science de l'hydraulique, M. De Prony, a supposé que les deux résistances croissent avec la vitesse relative. Cette hypothèse semble logique pour autant qu'il s'agisse de l'adhérence; en effet, les vitesses le long des parois, soit du fond soit des côtés, sont des quantités finies, car si l'on ne voit pas toujours au fond des courants d'eaux, l'on voit fort bien que la vitesse sur les rives est appréciable, donc finie; par suite, l'on conçoit à la rigueur qu'une certaine fonction de cette vitesse à la paroi puisse faire équilibre au poids du liquide. Mais il n'en est plus

de même de la cohésion, ou plutôt sa valeur doit s'exprimer autrement : la vitesse relative de deux couches contiguës du liquide est un infiniment petit, et une fonction d'infiniment petit ne peut pas égaler une quantité finie ; il suffirait, comme nous le prouverons au chapitre IV, d'une vitesse *excessivement petite* du liquide, glissant sur lui-même, pour produire une résistance égale à celle qui est causée par une vitesse finie du liquide, glissant sur la paroi, et égale à la force accélératrice imprimée par la pesanteur à toute la masse supérieure.

La cohésion étant en outre *infiniment* plus grande que l'adhérence et que la force de la pesanteur, si l'on représentait, avec De Prony, l'adhérence par $f(v') + F(v')$, où v' serait la vitesse au fond d'un canal ou conduit découvert, et par $f(v''-v')$ la force retardatrice (qui proviendrait aussi, dit De Prony, du glissement du filet contigu sur une *couche liquide adhérente à la paroi*, et par conséquent de *même nature* que l'adhérence) proportionnelle à $v''-v'=dv$, qui est due à la cohésion, il arriverait nécessairement, en développant $f(dv)$ et $f(v') + F(v')$ ou simplement $f(v')$ que la première ne saurait être égale à la seconde qu'à la condition d'avoir des coefficients infiniment grands tandis que $f(v')$ n'en a que de finis.

Développons $f(dv)$ suivant les puissances ascendantes de la variable dv :

$$f(dv) = Mdv + Ndv^2 + Pdv^3 \ldots\ldots\ldots$$

Comme dv est très-petit, l'on peut poser :

$$f(dv) = Mdv$$

Nous démontrerons au chapitre IV que ce coefficient M est nécessairement de la forme $C\frac{1}{dz}$, où z exprime la profondeur variable du filet liquide, et C une constante que l'on peut déterminer dans chaque expérience spéciale. Dès lors, la résistance fournie par la cohésion doit être représentée, non plus par Cdv, comme l'admettait De Prony, mais par $C\frac{dv}{dz}$, ainsi que l'ont prouvé Navier et Dupuit, du moins approximativement. Il n'est pas hors de propos de faire remarquer que cette expression $C\frac{dv}{dz}$ de la résistance due à la cohésion des

fluides, offre une analogie complète avec celle que l'on emploie, en mécanique, pour mesurer celle des solides; en effet, lorsqu'on écarte deux molécules solides, l'énergie de la cohésion qui tend à les rapprocher n'est pas mesurée simplement par leur distance, mais par le rapport de leur distance actuelle à leur distance primitive.

Ajoutons ici que lorsqu'on substitue $f\left(\frac{dv}{dz}\right)$ à $f\,(dv)$ il n'est plus permis de supprimer les termes en dv^2, dv^3, etc., attendu que $\left(\frac{dv}{dz}\right)^2$ $\left(\frac{dv}{dz}\right)^3$, etc., deviennent des quantités finies. Cependant, nous verrons plus loin que, s'il n'est pas exact d'exprimer par $C\frac{dv}{dz}$ l'énergie de la cohésion, c'est parfois une valeur assez approchée dans la pratique; et que, pour représenter rigoureusement cette résistance, il faut employer l'expression $C\left(\frac{dv}{dz}\right)^m$.

Navier (1) le premier a cherché à résoudre le problème du mouvement des fluides, en introduisant dans l'équation générale les forces produites par la viscosité. S'appuyant sur les idées de Newton, il pose en principe que, « par l'effet du mouvement du fluide, les actions « répulsives des molécules sont augmentées ou diminuées d'une quan- « tité proportionnelle à la vitesse avec laquelle les molécules s'éloi- « gnent ou se rapprochent entre elles. Il s'établit, *même dans l'état* « *d'équilibre* (en hydrostatique, par conséquent), des actions répul- « sives entre les molécules du fluide et celles des parois solides dans « lesquelles il est contenu. Ces actions doivent être également modi- « fiées ou diminuées de quantités proportionnelles aux vitesses avec « lesquelles chaque molécule fluide s'approche ou s'éloigne de chaque « molécule immobile appartenant à la paroi. »

L'on peut conclure de cette définition, que Navier place ces deux forces sur la même ligne; une seule et même hypothèse sert de base à la formule qui les représente, c'est celle d'une résistance proportionnelle à la vitesse avec laquelle les molécules s'éloignent ou se rapprochent.

(1) *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*, tome VI.

Si, avec Navier, l'on désigne par a la vitesse, très-petite d'ailleurs, avec laquelle deux molécules fluides se séparent, et par $f(a)$ une fonction de a qui représente la cohésion, c'est-à-dire l'action mutuelle ou force mutuelle développée par la viscosité proportionnellement à a, l'on obtiendra, par le développement de $f(a)$ en série :

$$f(a) = A + Ba + Ca^2 + Da^3 + \ldots\ldots\ldots;$$

comme les expériences tendent à prouver que $f(a)$ devient insensible quand a est nul, Navier pose : $A = o$. En outre, à cause de la petite valeur de a, il admet que les termes Ca^2, Da^3....., sont négligeables par rapport à Ba, et que, par suite, la force $f(a)$ est proportionnelle à la vitesse a.

L'hypothèse de $A = o$ n'est pas rigoureusement vraie ; il y a nécessairement un terme constant dans le développement de $f(a)$, car un plan incliné reste mouillé après l'écoulement ; et ce fait résulte, non pas de l'existence d'un revêtement aqueux (D'Aubuisson), mais de ce que l'écoulement s'y est terminé au moment où la hauteur h de l'eau sur cette paroi était sensiblement nulle ; en effet, la nature des choses s'oppose à ce qu'un écoulement d'une hauteur finie puisse être interrompu brusquement.

Quant à la deuxième hypothèse de Navier, elle est complétement en opposition avec la réalité. Pour que Ca^2, Da^3....., disparaissent devant Ba, il faut que a soit infiniment petit et que B ne soit pas nul ; or, rien n'établit à priori que B soit nul, et comme a est une quantité finie quand il s'agit des molécules en contact avec la paroi, le raisonnement de Navier n'est plus du tout applicable,

Partant de la relation $f(a) = Ba$, Navier arrive, après bien des calculs, à remplacer les trois équations (1) (2) (3), relatives au mouvement d'un fluide parfait, par trois nouvelles relations plus compliquées et, par conséquent, plus difficiles à résoudre ; les équations (4 bis) et (5) restent les mêmes pour les liquides naturels comme pour ceux d'une fluidité parfaite.

Les cinq équations différentielles, du second ordre, ainsi modifiées partiellement, s'appliquent seulement aux points pris dans l'intérieur de la masse liquide. Pour celles qui sont situées à la surface libre ou pour les molécules adhérentes aux parois, Navier a

posé d'autres équations différentielles spéciales et du premier ordre.

Il est donc probable que l'on serait arrivé à des résultats tout à fait vicieux si l'on avait fait à la pratique l'application des généralités théoriques et des formules de Navier. Ajoutons cependant que le mémoire de cet éminent mathématicien présente un progrès réel sur les théories des auteurs qui l'ont précédé; et que, le premier, il a donné à la résistance due à la cohésion la véritable forme de sa valeur : $C \frac{dv}{dz}$, ainsi que nous l'avons établi.

M. *Sonnet* a repris le travail de Navier. Dans un mémoire présenté par lui, en 1845, à l'Académie des sciences de Paris, il a fait voir le parti pratique que l'on pouvait retirer des tentatives stériles de Navier. Abandonnant le cas général traité par ce dernier, il a appliqué la considération de la différence des vitesses à quelques cas pratiques et en a déduit des formules très-importantes.

D'après Navier, les résistances dues à la viscosité, c'est-à-dire la cohésion et l'adhérence, sont *toutes deux* proportionnelles à la vitesse relative, soit des molécules fluides entre elles, soit des molécules fluides en contact avec celles de la paroi. M. Sonnet a modifié cette hypothèse en élargissant le principe. Se bornant au cas du mouvement permanent rectiligne, il représente aussi la résistance *totale* due à la viscosité par une fonction de la vitesse relative *a*, développable suivant les puissances entières de la variable, mais dont il conserve *tantôt un terme, tantôt deux termes*, suivant l'application. Il a obtenu ainsi plusieurs résultats analytiques très-simples, faciles à vérifier par expérience.

M. Sonnet déduit de son hypothèse les mêmes équations que Navier pour les filets intérieurs (la cohésion); mais celles qu'il pose pour les filets à la surface ou près des parois, ne sont plus du premier ordre. Il établit ces équations à l'aide de deux méthodes distinctes, dues à Navier et à Poncelet, et conduisant toutes deux aux mêmes résultats (1).

D'après M. Sonnet, la résistance des parois, c'est-à-dire l'adhérence, ne peut être représentée que par une formule d'interpolation

(1) Sonnet, *Mémoire sur le mouvement rectiligne et uniforme des eaux, en ayant égard aux différences de vitesse des filets.*

de la forme $A + Ba + Ca^2 + Da^3$....., jusqu'à ce que des observations spéciales aient fait découvrir la loi naturelle. Considérant comme telle la formule ordinaire (o) :

$$\varphi(v) = Bv + Cv^2$$

il pose en principe que la résistance des parois doit être représentée par une fonction *impaire* de la vitesse.

Ce principe ne nous semble pas plus rigoureux que celui de Navier ; c'est là une question que l'expérience seule peut décider, et nous verrons, au chapitre IV, qu'elle pourrait bien en avoir décidé autrement.

Ajoutons que M. Sonnet, loin de faire ressortir la distinction capitale qui existe entre la cohésion et l'adhérence, nous semble aussi avoir confondu la nature tout à fait différente de ces deux forces.

Nous avons basé quelques-unes des considérations précédentes sur les remarquables idées de M. J. Dupuit, l'un des plus logiques et des plus profonds hydrauliciens modernes. En traitant la question des eaux courantes, nous développerons la théorie de cet éminent ingénieur ; nous ferons connaître aussi les méthodes de MM. Sonnet et D'Arcy, ainsi que les modifications importantes, résultant des recherches expérimentales de ce dernier, et qui tendent à modifier sérieusement les hypothèses et les formules généralement admises.

h'. Des piézomètres.

Avant de terminer ce chapitre, disons quelques mots sur une certaine catégorie d'instruments appelés *piézomètres*, destinés, ainsi que leur nom l'indique, à mesurer les pressions aux différents points de la trajectoire d'une molécule ou d'une masse liquide en mouvement.

Si l'on appelle p la pression, par unité de surface, exercée soit à la partie supérieure soit à l'intérieur même d'une masse fluide, l'on peut se représenter cette action comme exercée par une certaine colonne d'un liquide pesant quelconque, mais d'une hauteur h telle que son poids, sur l'unité de surface pressée, soit égal à p.

Soit Δ le poids, par unité de volume, du liquide pesant en question, c'est-à-dire le poids qui correspond à la masse $\delta = \frac{M}{V}$ = la masse par unité de volume. Nous devrons poser :

$$p = \Delta\, h \text{ d'où } h = \frac{p}{\Delta}$$

Δ sera constant si le liquide est homogène.

Cela posé, rappelons aussi l'équation (p) s'appliquant aux liquides pesants et homogènes, et trouvée en g' § III.

$$z - \frac{p}{\Delta} + \frac{1}{g}\int \psi' \cos.\ \omega.\ ds - \frac{V^2}{2g} = C$$

Supposons maintenant une masse liquide XY (fig. 7), pesante et homogène, en mouvement permanent, et $a'a''$ une portion de la trajectoire décrite par une même molécule. Appliquant aux points a' et a'' l'équation (p) et désignant par s' et s'' les portions Xa' et Xa'' de la trajectoire, l'on obtient :

$$z' - \frac{p'}{\Delta} + \frac{1}{g}\int_o^{s'} \psi' \cos.\ \omega.\ ds - \frac{V'^2}{2g} = C$$

$$z'' - \frac{p''}{\Delta} + \frac{1}{g}\int_o^{s''} \psi' \cos.\ \omega.\ ds - \frac{V''^2}{2g} = C$$

$$z'' - z' - \frac{p'' - p'}{\Delta} + \frac{1}{g}\int_{s'}^{s''} \psi' \cos.\ \omega.\ ds - \frac{V''^2 - V'^2}{2g} = o$$

Ainsi que nous l'avons vu, la pression en a' peut être censée produite par une colonne liquide dont la hauteur *verticale* soit $\frac{p'}{\Delta}$; de même pour a'', où l'on aurait $\frac{p''}{\Delta}$. Soient $a'n'$ et $a''n''$ ces deux colonnes; z' et z'' les distances verticales des points a' et a'' à un plan horizontal de comparaison AB. La différence du niveau $n''m$ ou H, entre les deux points considérés sera :

$$n''m \text{ ou } H = z'' - \frac{p''}{\Delta} - \left(z' - \frac{p'}{\Delta}\right)$$

Substituant, dans l'équation plus haut, cette expression de H, il en résulte :

$$H + \frac{1}{g}\int_{s'}^{s''} \psi' \cos.\omega.\, ds - \frac{V''^2 - V'^2}{2g} = o$$

Lorsqu'on néglige l'action de la viscosité, il reste :

$$H - \frac{V''^2 - V'^2}{2g} = o$$

$$V''^2 - V'^2 = 2gH$$

ce qui est l'équation des variations de la vitesse d'un point matériel qui glisserait, sans frottement, le long de la trajectoire XY.

Mais si l'on tient compte de la viscosité et que l'on représente par θ le travail négatif fait par cette force, de a' en a'', l'on obtient :

$$\frac{1}{g}\int_{s'}^{s''} \psi' \cos.\omega.\, ds = -\theta$$

$$H - \theta = \frac{V''^2 - V'^2}{2g}$$

et la variation réelle de hauteur due à la vitesse ne sera plus que $H - \theta$, comme si l'on avait retranché la quantité θ de la différence de niveau $H = n''m$, qui existerait en réalité si la viscosité ne produisait aucune résistance.

Supposons, comme application de l'hypothèse précédente, un cylindre liquide XY s'écoulant par un tuyau de conduite, horizontal ou incliné (fig. 8), adapté à un réservoir qui est constamment rempli.

Lorsqu'on fermera l'extrémité Y, le liquide viendra exercer en chaque point du tuyau une pression due à la charge AO ; de sorte que si l'on adapte en o', o'', o''', des tubes verticaux o'E, o''D, o'''C, le liquide s'y élèvera jusqu'à ce que le poids des colonnes liquides fasse équilibre à la pression en ces points, c'est-à-dire jusqu'au niveau AG ; c'est, du reste, la loi des tubes *communiquants* et le principe du *niveau d'eau*.

L'extrémité Y étant débouchée, le liquide prendra un mouvement dû à la pression exercée en X par la charge ; et, si l'on suppose une contraction nulle et une viscosité négligeable, il sortira en Y avec une vitesse due à la charge AO. Le fluide des tubes o'E, o''D, o'''C, bais-

sera jusqu'au niveau Oo''', puisque toute la force de la charge agit parallèlement à l'axe XY, sans produire de pression à la suface supérieure.

Supposons enfin que Y ne soit débouché qu'en partie, ou bien que l'on y ménage un orifice de sortie plus petit que la section du tuyau de conduite, censé encore très-court et disposé en X de façon à détruire la contraction. Le liquide sortira toujours en Y avec la vitesse V due à AO (ou plutôt à yC), mais la vitesse v dans le tuyau sera plus petite dans le rapport inverse des sections. Représentant AO (ou yC) par H, et par h la hauteur de charge capable de produire v, il existera, dans la conduite, une vitesse $\sqrt{2gh}$ parallèle à l'axe et ne produisant aucune pression supérieure; il s'y trouvera, en outre, une deuxième action capable d'engendrer la vitesse $\sqrt{2g(H-h)}$ et agissant sur *toutes* les molécules, dans tous les sens, et qui, par suite, pressera le liquide de bas en haut, aux points o', o'', o'''; celui-ci montera dans les tubes et s'arrêtera à un certain niveau mn, tel que $Am = h = \frac{v^2}{2g} = 0{,}051\ v^2$.

De là, le grand principe établi par D. Bernouilli, au moyen du calcul d'abord, et ensuite par l'expérience, principe dont il a fait la base de son *hydraulico-statique* : la pression que l'eau en mouvement dans un tuyau exerce contre un point quelconque de ses parois est égale à la charge (effective) sur ce point, moins la hauteur due à la vitesse dans ce tuyau.

Nous avons vu que ce principe n'est rigoureux qu'à la condition de négliger certaines résistances.

L'on désigne sous le nom de *colonnes piézométriques,* les colonnes fictives $a'n'$, $a''n''$ (fig. 7) et l'on appelle *piézomètres,* des tubes réels o'E, o''D, o'''C, (fig. 8) implantés dans un liquide, et suffisamment déliés pour ne pas gêner le mouvement. Ces tubes seraient d'un immense secours en hydraulique, si la dernière condition pouvait être réalisée à l'intérieur même des liquides; quant à leur emploi, à la surface des tuyaux, il est permis d'admettre qu'il ne peut produire aucune modification apparente ou probable, surtout si l'on a égard aux perfectionnements apportés à ce genre d'instruments. Nous citerons, entre autres, le *piézomètre différentiel* de M. Bélanger, composé de

deux tubes, analogues à $o'E$ et $o''D$, et destiné à donner directement la différence des *niveaux piézométriques* ou la différence de pression entre deux sections ou deux points peu éloignés. Nous y reviendrons dans le chapitre suivant.

L'on appelle *niveau piézométrique,* le niveau du liquide dans le piézomètre; quelquefois il représente celui du liquide diminué de 10^m33 qui est la hauteur d'eau représentant la pression atmosphérique; c'est, du reste, indifférent en pratique, puisqu'il s'agit toujours de prendre des différences, par suite desquelles le terme constant ajouté 10^m33 doit disparaître dans la soustraction.

La *charge entière* est celle qui correspond à la hauteur totale $Cy = H$ entre le niveau du réservoir et l'orifice de sortie y. Par suite de la viscosité et de la contraction, le liquide sort, en y, avec une vitesse moindre que celle qui serait due à H, et égale, d'après les notations admises, à $H - \theta$, que l'on désigne sous le nom de *charge effective.*

Par analogie, pour tout autre point a', a'', etc., de la conduite, sa charge *entière* sera la hauteur $AX = H$ du réservoir, *au-dessus de ce point;* et sa charge *effective* sera H diminuée de la résistance éprouvée par le liquide depuis l'origine X de la conduite.

Si l'on désigne par *charge* l'abaissement du niveau piézométrique entre deux points a' et a'' (fig. 7) ou le relèvement de ce niveau en l'affectant du signe —, et par *perte de charge* la quantité θ, qui, en réalité est une perte puisqu'elle se retranche de H dans la formule

$$V'' - V' = 2(H - \theta)$$

qui donne l'accroissement ou la perte de force vive, le théorème de D. Bernouilli, dans le cas des liquides pesants et homogènes, peut s'énoncer comme suit : *l'accroissement de la hauteur due à la vitesse est égal à la différence entre la charge et la perte de charge.*

CHAPITRE DEUXIÈME.

ÉCOULEMENT PERMANENT D'UN LIQUIDE PESANT ET HOMOGÈNE.

A. PAR UN ORIFICE PERCÉ DANS LE RÉSERVOIR.

a. Vitesse de l'écoulement.

La vitesse d'écoulement d'un liquide, par un orifice percé dans un réservoir à niveau constant, peut se déterminer au moyen du théorème de D. Bernouilli et du principe des forces vives.

Adoptant les désignations employées au chapitre premier, dans la démonstration du théorème de D. Bernouilli, nous supposerons que le mouvement est assez faible dans le vase pour permettre de négliger ψ ou $\frac{1}{2}\delta(V'^2 - V^2)$; c'est, en d'autres termes, admettre que l'orifice d'écoulement soit très-petit par rapport à la section horizontale minima du réservoir. La pression P', par unité de surface, devient donc :

$$P' = P + \Delta(H - H') - p.$$

Nous ferons aussi abstraction de l'adhérence du liquide contre les parois, et de la cohésion dont l'effet est insensible à cause de la lenteur du mouvement.

Les forces actives qui font descendre la masse ABCD (fig. 9) en A'B'C'D', pendant l'instant dt, sont : la pesanteur et la résultante $\pm(P - p)$ des forces extérieures. D'après le principe des forces vives, il faut : chercher le travail *élémentaire* développé par ces forces; puis, l'accroissement de force vive résultant de ce travail. Cela fait,

en égalant la seconde quantité au *double* de la première, l'on obtient une relation qui conduit à la valeur de U, vitesse d'écoulement. Suivons cette marche.

Dans le transport de la masse ABCD, ou M, de la position primitive ABCD jusqu'en A'B'C'D', la pesanteur, d'abord, produit une quantité de travail instantanée (c'est-à-dire en un temps dt) égale au produit du poids de cette masse par l'espace, ou chemin *virtuel* décrit par son centre de gravité. Or, d'après la théorie des forces parallèles, cette quantité est exprimée par $\Delta\,(\overline{AB, A''B''})\,(H - H')$ où $\overline{AB, A''B''}$ est le volume d'une tranche infiniment petite de ABCD. Ceci se ramène à la forme $gdM\,(H - H')$ si l'on remarque que $\Delta = \delta g$ et que le volume $dV = \frac{dM}{\delta}$.

Mais cherchons directement la quantité de travail instantanée, c'est-à-dire pendant dt.

Évidemment, le travail instantané d'une tranche mince ABB''A'' de la masse M est gdM, et son moment virtuel est $gdMdz$, en appelant z le chemin virtuel variable entre H et H'. Le moment virtuel de la masse M est donc :

$$gdM \int_{H'}^{H} dz = gdM\,(H - H')$$

De même, la quantité de travail instantanée produite par $P - p$ est $gdM\left(\frac{P - p}{\Delta}\right)$; en effet c'est :

$$PS.\,dz - p\sigma.\,dz' = P.\,Sdz - p.\,\sigma dz'$$

Or, $Sdz = \sigma dz'$, car les volumes liquides écoulés en temps égaux sont égaux (par suite, aussi, l'épaisseur des tranches est en raison des vitesses); de là :

$$P.\,Sdz - p.\,\sigma dz' = PdM.\,\frac{g}{\Delta} - pdM\,\frac{g}{\Delta}$$

$$P.\,Sdz - p.\,\sigma dz' = \frac{1}{\Delta}\,(P - p)\,gdM$$

La quantité d'action instantanée totale est donc :

$$gdM\left\{(H - H') + \frac{P - p}{\Delta}\right\}$$

Soit maintenant $\int dM.\ V^2$ la force vive totale de la masse M, dans sa position primitive ABCD (elle a une vitesse V en arrivant en AB d'une façon continue, et l'on admet que cette vitesse reste constante). Soit $\int dM.\ V'^2$ celle qu'a atteinte la masse M arrivée en A'B'C'D'. L'accroissement total est $dM\ (V'^2 - V^2)$; en effet, voyons d'abord quelle est la somme des forces vives que possédaient toutes les tranches de la masse M, dans sa première position ABCD :

1re tranche AB.	$dM.\ V^2$
2e »	$dM.\ v^2$
3e »	$dM.\ v'^2$..... etc.

la dernière tranche précédant celle où la vitesse est V'.

Arrivée en A'B'C'D', censée momentanément à *un dz* en dessous (afin d'éviter des A''B''C''D'', etc., en notations), la 1re tranche de A'B'C'D' a atteint la vitesse v de la 2e tranche de ABCD, etc., et la dernière est V'. Retranchant les premières des secondes, l'on obtient : $dM\ (V'^2 - V^2)$.

L'on en conclut, en supprimant le facteur commun dM :

$$V'^2 - V^2 = 2g\,(H - H') + 2g\left(\frac{P - p}{\Delta}\right)$$

Pour appliquer cette relation à la section *ab*, où la veine a repris le parallélisme, l'on fera $V' = U$ et $H - H' = H''$ la hauteur du niveau AB au-dessus de *ab*, puisque H' est ici égal à K (fig. 7). En outre, comme l'on sait que $V : U = \sigma : S$, il suit que : $V^2 = \frac{\sigma^2}{S^2} . U^2$; d'où :

$$U = \sqrt{\frac{2g\left(H'' + \frac{P - p}{\Delta}\right)}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}}$$

ou généralement :

$$U = \sqrt{\frac{2g\left(H + \frac{P - p}{\Delta}\right)}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}} \quad \ldots\ldots\ldots (m)$$

qui est la *formule* donnant la *vitesse* d'écoulement pour un *orifice quelconque*.

Cherchons les transformations de cette formule (m) pour quelques cas particuliers.

Si l'on fait $\sigma = S$, alors $U = \frac{1}{0}$ ou l'absurde, c'est-à-dire que la formule n'est plus applicable. En effet, le liquide tombant alors librement par la gravité, le mouvement permanent et par tranches parallèles n'est pas applicable non plus.

Dans le cas ordinaire, où l'orifice est très-petit par rapport à la section du réservoir, le terme $\frac{\sigma^2}{S^2}$ est négligeable; de là :

$$U = \sqrt{2g\left(H + \frac{P - p}{\Delta}\right)} \text{ ..... } (n)$$

qui est la *formule* de la *vitesse* pour un *orifice très-petit*.

Enfin, si le liquide s'écoule dans un même milieu que celui du réservoir, par exemple à l'air libre, alors $P = p$ et les formules (m) et (n) deviennent :

$$U = \sqrt{\frac{2gH}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}} \text{ ..... } (m')$$

$$U = \sqrt{2gH} \text{ ..... } (n')$$

D'après *Navier*, il est prouvé par expérience que l'on peut supprimer le terme $\frac{\sigma^2}{S^2}$ lorsque le rapport $\frac{\sigma}{S}$ ne dépasse pas $\frac{1}{20}$. Ce rapport peut s'élever à $\frac{1}{10}$ suivant *Poncelet* (1).

Toricelli trouva la formule $U = \sqrt{2gH}$ en 1643, par l'observation de la hauteur des jets d'eau et par les lois de la chute des graves récemment découvertes par son maître *Galilée*. L'expression de cette formule est connue sous le nom de *théorème de Toricelli;* faisant abstraction de toute erreur d'approximation, on peut la traduire comme suit :

Théorème de Toricelli. La vitesse d'un fluide, à la sortie d'un orifice percé dans un réservoir, est celle qu'aurait acquise un corps grave en tombant librement de la hauteur comprise entre le niveau de la surface fluide et le centre de cet orifice.

Nous avons déjà vu combien cette conclusion est peu générale,

(1) Poncelet, *Archives hydrauliques*, page 250.

puisqu'elle exige certaines conditions essentielles tant pour la grandeur que pour la forme de l'orifice d'écoulement.

Si l'on considère deux fluides, de nature différente, sortant chacun d'un réservoir particulier par des orifices identiques, l'on aura, en supposant des charges différentes sur ces orifices :

$$V = \sqrt{2gh}$$
$$V' = \sqrt{2gh'}$$
$$V : V' = \sqrt{h} : \sqrt{h'}$$

c'est-à-dire : les *vitesses* sont entre elles comme les *racines carrées des charges*.

Il faudrait en conclure, avec D'Aubuisson, que la vitesse d'un fluide à sa sortie d'un orifice est indépendante de sa *nature* et de sa densité, et qu'elle ne dépend que de la charge (1). C'est là une conclusion que l'on ne peut admettre en général ; l'influence de la viscosité se fera évidemment sentir d'une manière notable dans l'huile tandis qu'elle sera presque nulle pour l'eau.

En 1695, *Varignon* démontra la formule $U = \sqrt{2gH}$ d'une manière rationnelle et générale, en se basant sur l'hypothèse que la tranche liquide située à l'orifice d'écoulement éprouve une pression égale au poids de la colonne liquide qui la charge. Mais cette hypothèse est loin d'être applicable à tous les cas ; nous avons déjà vu, en effet, qu'elle présuppose un mouvement très-lent dans le réservoir, c'est-à-dire un orifice fort petit, qui permette de considérer comme négligeable le terme $\frac{\sigma^2}{S^2}$; en outre, ici encore, cet orifice est soumis à certaines conditions particulières.

Lorsque l'écoulement, au lieu de se faire à l'air libre, se fait d'un réservoir dans un autre (fig. 10) dont le niveau soit à une hauteur h au-dessus du centre de la section ab de la veine contractée, la pression sur l'orifice ne sera plus p, mais p augmenté du poids de la colonne liquide de hauteur h ; si donc p représente, ainsi que P, la pression atmosphérique, et que le liquide soit de l'eau, comme dès lors la

(1) D'Aubuisson, *Traité d'hydraulique*, chap. I, § 13.

pression supplémentaire sur l'unité de surface est $\Delta' h = h$ pour ce genre de liquide, l'on aura :

$$\frac{P - p}{\Delta} = \frac{P - p}{\Delta} - \Delta' h = - h$$

D'où :

$$U = \sqrt{\frac{2g(H - h)}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}} \text{ ..... } (m'')$$

Et, dans le deuxième cas considéré plus haut :

$$U = \sqrt{2g(H - h)} \text{ ..... } (n'')$$

Telles sont les *formules* applicables à *l'écoulement de l'eau, d'un réservoir dans un autre ;* la première se rapporte à un orifice quelconque ; la seconde convient au cas d'un orifice très-petit.

b. Forme de la veine fluide.

1° *L'orifice étant circulaire et en mince paroi.*

Nous avons déjà vu que, pour des orifices circulaires, le parallélisme des tranches peut être admis à l'endroit de la section contractée *mn* (fig. 6, 2°), et qu'à partir de cet endroit la veine affecte la forme d'un cylindre dont *mn* serait la section droite.

Comme tout est symétrique sur le cercle d'orifice, direction et vitesse, la veine contractée doit aussi avoir une forme symétrique, et être, par suite, un solide de révolution, un conoïde. Ce résultat est confirmé par l'expérience, et l'on peut admettre approximativement, avec *Michelotti*, que les courbes *m'm* et *n'n* (fig. 6, 2°) se rapportent à une cycloïde.

Quelques auteurs ont cherché à déterminer directement le rapport des diamètres *mn* et *m'n' ;* d'autres ont aussi mesuré la forme et la surface de la section *mn* de plus grande contraction.

Newton, qui le premier avait reconnu le phénomène, tenta aussi de mesurer physiquement le diamètre *mn*. Après lui, divers hydrauliciens s'occupèrent de cette question ; tels sont : *Poleny, Borda,* les *Michelotti, Bossut, Eytelwein, Venturi, Brunaci,* etc. Appelant D le diamètre *m'n'* et *d* le diamètre *mn*, la valeur moyenne des résultats

trouvés est environ 0.80. Nous verrons plus loin que cette quantité est légèrement supérieure à la réalité; le fait n'a rien de surprenant lorsqu'on songe aux chances d'inexactitude résultant d'une opération faite au compas d'épaisseur.

Quant à la mesure directe de la forme et de la surface σ' de la section *mn*, voici comment les expériences ont été faites :

Ayant disposé, à l'intérieur d'un bâti, une série d'aiguilles métalliques, toutes dans un même plan, l'on a fait passer la veine à travers le vide intérieur limité par les pointes de ces tiges, et de façon que leur plan fût celui de la surface σ' à mesurer. Cela fait, l'on enfonçait avec précaution les aiguilles jusqu'à ce qu'elles vinssent affleurer la veine sans y pénétrer. L'écoulement étant arrêté, les pointes métalliques dessinaient exactement la section cherchée.

La recherche du plan *mn* de la section minima se faisait par tâtonnement.

Connaissant σ', l'on mesurait σ sur le réservoir, et l'on en concluait le rapport $\frac{\sigma'}{\sigma} = n$ le coefficient de contraction.

L'on voit déjà ici combien ce moyen expérimental est imparfait.

Les expériences, telles que nous venons de les détailler, ont été exécutées d'abord sur des orifices circulaires dont les diamètres variaient de 0^m02 à 0^m16. Il a été constaté :

1° Que la section minima se trouve à une distance de l'orifice égale, à peu près, au rayon $r = \frac{d}{2}$ de l'aire σ', et que celle-ci est aussi un cercle comme σ.

2° Que le rapport $\frac{r}{R}$ ou $\frac{d}{D} = 0,79$; d'où il résulterait :

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 = \overline{0,79}^{\,2} = 0,624 = n$$

c'est-à-dire que le *coefficient de contraction* aurait, pour de tels orifices, une valeur très-rapprochée de $\frac{5}{8}$.

Cette valeur du rapport $\frac{d}{D} = 0,79$ avait déjà été trouvée par *Michelotti*, le fils, dans des expériences de précision faites avec de gros

jets et de fortes charges. Le rapport moyen obtenu par lui, à la suite d'un grand nombre d'opérations, a pour valeur 0,787; les diamètres $m'n'$ de l'orifice ayant varié entre 0^m0812 et 0^m1624, et la hauteur des charges entre 2^m10 et 6^m76 (1).

D'après le même hydraulicien, la longueur de la veine contractée serait environ la moitié du diamètre d, ou les 0,39 de D; et les trois dimensions principales $m'n'$ ou D, mn ou d, et ao (fig. 6 2°) seraient entre elles comme les nombres 100, 79 et 39.

Eytelwein adopte les nombres 10, 8, 5; ces rapports, ainsi que les précédents, peuvent être considérés comme une approximation suffisante dans les cas précités.

L'on obtiendrait, d'après Michelotti :

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \overline{0,787}^2 = 0,619 = n$$

Comparant ces deux valeurs 0,624 et 0,619, l'on peut admettre, pour conclusion, la valeur moyenne

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = n = 0,62$$

L'on conçoit que cette valeur ne saurait être qu'une approximation plus ou moins satisfaisante si on voulait l'appliquer à un orifice circulaire quelconque; il doit paraître peu probable que le rapport $\frac{\sigma'}{\sigma} = n$ soit constant d'une façon absolue, et ne varie ni avec le rayon R ni avec la position de l'orifice par rapport à la surface du niveau dans le réservoir.

Nous verrons, en effet, que le rapport n éprouve de légères variations suivant les dimensions respectives de l'orifice $m'n'$ de sortie, et que, dans plusieurs circonstances, il subit l'influence de la hauteur de charge.

2° *L'orifice étant quelconque.*

L'on s'exposerait à des erreurs plus fortes encore si l'on admettait que $n = 0,62$ pût s'appliquer à des orifices non circulaires. Dans ce cas, l'aire σ de la section $m'n'$ a une grande action sur la variation du

(1) *Mémoires de l'Académie des sciences de Turin*, 1784-1785.

coefficient. Dans des expériences faites sur des orifices carrés, de 0m20 de côté, M. Lesbros a remarqué que, pour des charges supérieures à 1m70, le coefficient n n'éprouve guère de variations sensibles pour de mêmes valeurs de σ. Cependant, l'on s'accorde à reconnaître que n décroît progressivement des plus faibles charges aux plus fortes, depuis 10 jusqu'à 300 fois le diamètre de l'orifice. Cette hypothèse n'est nullement vérifiée par les nombreuses expériences de M. Lesbros. (Voir les tables.)

Les orifices, dont le pourtour est un polygone, donnent lieu à un phénomène connu sous le nom de *renversement* ou d'*inversion de la veine* fluide (1). Ce phénomène est simplement curieux; il n'a été, jusqu'à présent, d'aucune utilité en hydraulique.

c. De la dépense théorique et de la dépense réelle pour des orifices en mince paroi.

1° *Dépense théorique.*

La dépense, étant la quantité d'eau écoulée en l'unité de temps, se représente théoriquement par le produit de l'aire σ' appartenant à la section contractée et de la vitesse U observée ou calculée pour cette section. Elle est donc égale à $U\sigma' = n\sigma\sqrt{2gH}$, d'après la formule ($n'$).

Si l'on admet que la formule (n') donne avec une exactitude suffisante la vitesse en tous les points de la section contractée, et que celle-ci soit définie parfaitement quant à sa forme et à ses dimensions, le calcul de la dépense d'un orifice en mince paroi, sauf le cas d'une faible charge, se réduira à multiplier l'aire 0,62 σ par la vitesse du filet central, ou approximativement, par celle de l'orifice, en prenant pour H l'ordonnée du centre de ce dernier.

Si l'on se rappelle la méthode employée pour mesurer la forme de la section minima de la veine, l'on peut déjà prévoir le peu de garanties d'exactitude présentées par le calcul théorique de la dépense.

Quant à la vérification expérimentale de la formule (n'), l'on peut employer deux moyens de mesurer la vitesse avec laquelle les filets traversent la section contractée.

(1) G. Bidone, *Expériences sur la forme et la direction des veines et courants d'eau.* Turin, 1829. — Poncelet et Lesbros, *Expériences hydrauliques*, etc. 1832.

Le premier moyen consiste à relever exactement l'aire σ', puis à mesurer le cube d'eau Q écoulé ou dépensé dans l'unité de temps; de là on pourra poser et conclure :

$$Q = \sigma' U$$
$$U = \frac{Q}{\sigma'}$$

Le second moyen consiste à observer l'amplitude du jet dans la portion où les molécules décrivent approximativement des *paraboles*. L'on sait, en effet, que lorsqu'un corps est lancé dans une direction quelconque *oy* (fig. 9) avec une certaine vitesse, par suite de cette impulsion donnée et de la force uniformément accélérée due à la gravité, le corps décrira une parabole dans le vide, ou une courbe qui s'en rapproche si le milieu est peu résistant; et le paramètre de cette courbe sera égal à quatre fois la hauteur due à la vitesse de projection.

Si donc, pour un point quelconque *n* du filet central, l'on désigne par *y* la longueur *mn* parcourue dans le sens *oy* de la vitesse initiale U; par *x* l'abaissement vertical *om* correspondant en dessous de *oy;* et par *t* le temps employé pour parcourir *on*, l'on obtiendra pour formules du mouvement uniformément varié :

$$y = Ut \text{ et } x = \frac{1}{2} gt^2$$

Prenant dans la première équation la valeur de *t* et la substituant dans la seconde, il vient :

$$x = \frac{1}{2} g \frac{y^2}{U^2} \text{ ou bien } y^2 = \frac{2U^2}{g} x$$

Appelant *h* la hauteur *op* telle que $U^2 = 2gh$, d'où $h = \frac{U^2}{2g}$, il en résulte :

$$y^2 = 4hx$$
$$h = \frac{y^2}{4x}$$

Il suffit donc de mesurer les deux longueurs *y* et *x* pour connaître la hauteur *h* qui produit la vitesse U, et par suite, pour trouver cette vitesse par l'équation :

$$U = \sqrt{2gh} = 2{,}215 \frac{y}{\sqrt{x}} \quad \ldots\ldots\ldots (p)$$

En appelant vitesse théorique celle que l'on obtient par l'équa-

tion $U = \sqrt{2gh}$ et vitesse réelle celle qui est fournie par l'équation (p), *Bossut* a trouvé, dans deux expériences, 0,974 et 0,980 pour le rapport K de la seconde à la première. Plusieurs observations faites par *Michelotti* fils, sur des orifices circulaires de 0,0271 de diamètre, avec des charges variables depuis 2^m29 jusqu'à 7^m19, ont donné 0,993 à 0,983 pour valeur du rapport K. L'on voit, d'après les résultats précédents, que pour de petits orifices circulaires, en mince paroi, la vitesse réelle $n\sqrt{2gh}$ diffère très-peu de la vitesse théorique $U = \sqrt{2gh}$.

Quelque négligeable que soit cette différence, elle existe, et jusqu'ici elle n'a pu être rigoureusement expliquée. Dans le calcul fait pour arriver à l'équation finale (n') ou $U = \sqrt{2gh}$, l'on a certainement négligé certaines forces, telles que l'accélération ψ, la viscosité, le frottement; mais le fait suivant prouve, à l'évidence, qu'il existe d'autres causes d'inexactitude dont on ne sait encore tenir compte. A la suite d'expériences faites sur des veines sortant par un orifice carré de 0^m20 de côté, et pour lesquelles avait lieu le phénomène de l'inversion, M. *Lesbros* reconnut que le rapport K n'était plus une fraction, mais un nombre fractionnaire dépassant l'unité de 0,04 environ. Or, comme la viscosité ou le frottement tendent à diminuer la vitesse et non à produire un travail positif, il faut admettre que la perte de charge causée par ces forces retardatrices est compensée, dans certaines circonstances, par d'autres effets que la théorie n'introduit pas dans le calcul : telle serait, par exemple, l'existence dans le réservoir d'une vitesse sensible qui troublerait la loi hydraulique des pressions; ou le défaut de permanence du mouvement; enfin, la possibilité d'une certaine raréfaction de l'air, ou du milieu gazeux, autour de la veine, ce qui tendrait à augmenter la différence $P - p$.

Quoi qu'il en soit, l'erreur à craindre sur la vitesse dans le cas de charges modérées, étant limitée à 3 ou 4 centièmes par l'emploi de la formule (n') ou $U = \sqrt{2gh}$, l'on peut regarder le problème comme résolu d'une manière satisfaisante, et l'on est fondé à conclure que : dans l'écoulement par des orifices en mince paroi, la vitesse de sortie est, à très-peu près, due à la hauteur du liquide dans le réservoir, et qu'elle n'est pas diminuée sensiblement par la contraction.

Quant aux vitesses qui se produiraient avec des charges de beaucoup supérieures à 7 mètres, aucune observation n'a été faite jusqu'à ce jour, dans ces conditions.

Lorsque la hauteur verticale d de la section contractée n'est pas petite en comparaison de la charge h sur son centre de gravité, les vitesses des différents filets liquides ne sont plus rapprochées de l'égalité, et il pourrait sembler nécessaire de chercher l'intégrale définie du produit de chaque élément superficiel ou de chaque tranche élémentaire par la vitesse qui lui est propre. Mais l'on peut prouver théoriquement que, pour des orifices circulaires ou rectangulaires, l'erreur relative ne s'élèverait aussi qu'à 3 ou 4 centièmes, même pour des valeurs de h inférieures à d.

Des considérations précédentes il est aisé de conclure que le calcul de la dépense, par des procédés pratiques combinés avec l'emploi de la formule (n'), présenterait des incertitudes plus ou moins graves suivant les charges et les orifices. L'on serait exposé à commettre de petites erreurs : 1° sur l'aire σ' de la section contractée minima ; 2° sur la hauteur h du filet central ; 3° sur la vitesse de ce dernier ; 4° sur les forces dues à la cohésion, au frottement, etc. La somme de toutes ces erreurs produirait parfois un résultat peu satisfaisant comme approximation.

Remarquons, en outre, que l'hypothèse du parallélisme des tranches, applicable aux orifices circulaires, n'est que très-approximative quand il s'agit d'orifices rectangulaires ou carrés, et qu'elle est inexacte pour le cas de polygones ou de sections composées. L'on peut dire, en effet, que, pour des orifices rectangulaires, il n'existe pas de section *contractée minima ;* car le plus grand rétrécissement de la veine dans le sens des longs côtés n'est pas à la même distance de l'orifice que le plus grand rétrécissement dans le sens des petits ; les filets y conservent toujours un mouvement inégal, divergent ou convergent suivant les circonstances.

2° *Dépense réelle, ou expérimentale.*

Pour arriver à la valeur réelle de la dépense, corrigée de l'influence de la contraction et de toutes les autres forces positives ou négatives,

connues ou inconnues, les hydrauliciens préfèrent employer le procédé suivant, dû à D. Bernouilli, dans lequel on n'emprunte aux considérations théoriques que la forme seule de l'expression de la dépense, sauf à déterminer par l'expérience un coefficient qui corrige en bloc toutes les inexactitudes précitées.

Nous avons vu que la dépense théorique Q s'exprime par la relation :

$$Q = \sigma \sqrt{2gh}$$

Ou, plus approximativement, par :

$$Q = n\sigma \sqrt{2gh}$$

Appelant Q′ la dépense effective et m' son rapport à la dépense théorique, l'on aura :

$$Q' = m'Q = m'n\sigma \sqrt{2gh}$$

Ou bien, en faisant $m'n = m$:

$$Q' = m\sigma \sqrt{2gh} \text{ ..... } (q)$$

L'on détermine, pour les différents cas de la pratique, les valeurs de m, en *mesurant directement* les volumes de Q′; appelant, par exemple, V, V′, V″..., etc., les divers volumes connus correspondant aux différents cas observés, l'on obtient, pour m, les valeurs :

$$m = \frac{V}{\sigma \sqrt{2gh}} \quad m' = \frac{V'}{\sigma \sqrt{2gh}} \quad m'' = \frac{V''}{\sigma \sqrt{2gh}} \text{ ..... etc.}$$

L'on inscrit ces valeurs m, m', m''..., etc., dans des tables qui fournissent ainsi le moyen d'évaluer Q′, pour les cas analogues à ceux dans lesquels ces valeurs m, m', m''..., etc., ont été déterminées par expérience.

De toutes les considérations précédentes il résulte d'abord, que le coefficient m de la formule (q) est variable, même pour un seul orifice d'aire σ, et cela, suivant des circonstances secondaires très-imparfaitement connues, telles que les dimensions respectives des côtés de l'aire σ, et la position de l'orifice relativement au fond ou aux faces latérales du réservoir. Par conséquent, lorsqu'on ne voudra pas se contenter de l'approximation donnée par les coefficients moyens n de dépense de la formule $Q = n\sigma \sqrt{2gh}$, il faudra rechercher, dans les recueils d'expériences, celles qui se rapprochent le plus du cas que

l'on veut déterminer, pour en déduire le coefficient applicable à ce cas. Parmi les recueils les plus étendus, et qui paraissent mériter le plus de confiance, l'on peut citer celui de M. Lesbros, qui comprend plus de deux mille expériences, dans les cas les plus variés et les plus utiles de la pratique. Nous y reviendrons plus loin.

Il faut remarquer, en second lieu, que le coefficient m est implicitement composé de deux éléments par rapport à la correction de la formule $Q = n\sigma\sqrt{2gh}$; l'un d'eux, M peut être considéré comme destiné à corriger les erreurs qui peuvent être contenues dans la valeur $n\sigma$ de l'aire mesurée σ' ; l'autre, M', serait affecté à la correction de la vitesse théorique $\sqrt{2gh}$. C'est donc à tort que l'on désigne parfois ce coefficient m=M.M' sous le nom de *coefficient de la contraction;* cette dénomination s'applique tout au plus à n, et le véritable nom à donner à m, dans la formule (q), est celui de *coefficient de la dépense.*

d. Calcul pratique de la dépense.

I. *Orifice percé dans une paroi mince et plane; la contraction étant complète.*

La plupart des expériences qui ont été faites pour déterminer le facteur m, par la méthode de D. Bernouilli, concernent spécialement les orifices carrés et circulaires en dessous de 0m10 de côté ou de diamètre. Nous citerons les résultats suivants :

1° Orifices circulaires, dont le diamètre varie de 0m001 à 0m015. (Orifices très-petits.)

D'après les expériences de D. Bernouilli, Mariotte, Hachette, etc., le coefficient m n'a varié que de 0,68 à 0,78, même sous les plus fortes charges.

Pour un diamètre de 0m013, et sous des charges qui ont varié de 96 à 280 fois ce diamètre, Bossut a trouvé 0,622.

Avec de faibles charges, et un diamètre variable entre 0,01 et 0,015, Castel est arrivé à une moyenne de 0,65 environ ; la valeur de m allant en décroissant à mesure que l'on augmentait le diamètre ou la charge.

2° Orifices circulaires, carrés ou rectangulaires, de 0m02 à 0m16 de

diamètre, ou de 0m02 à 0m08 de côté. (Orifices petits ou moyens.)

Des expériences nombreuses ont été faites par Eytelwein, Bossut, Michelotti, Borda, Hachette, D'Aubuisson, Castel, etc., et la plupart, sous des charges relativement très-considérables. Le coefficient *m* y a varié de 0,60 à 62, et sa moyenne générale se rapproche de 0.615, sans que l'on puisse apercevoir une loi de variation positive.

Cependant l'on est d'accord généralement pour admettre l'influence contraire des fortes charges, ainsi que nous l'avons déjà dit; le *pouce d'eau* des fontainiers semble en fournir une preuve convaincante. Pour cet instrument où l'orifice a 0m027 ou un pouce de diamètre et une charge de 7 lignes sur le centre, Mariotte a trouvé $m=0,665$; Bossut, $m=0,65$, et Hachette, $m=0,69$. La moyenne $m=0,668$ due à une si petite charge est donc bien supérieure à celle que l'on a obtenue sur des orifices analogues, mais avec des charges relativement considérables; quoi qu'il en soit, cette hypothèse est en contradiction avec les résultats donnés aux tables de M. Lesbros.

Dans des expériences sur des orifices rectangulaires, de hauteur constante 0,0092, mais de largeur variable, pour des charges d'environ 36 fois la hauteur, Bidone a trouvé (1) :

0,620	pour	0,0185	de base
0,620	»	0,0370	»
0,621	»	0,0739	»
0,626	»	0,1478	»

Ce n'est donc que lorsque la base était 16 fois plus grande que la hauteur, que le coefficient a sensiblement augmenté.

Dans des expériences plus récentes (2) sur des orifices de 0m01 de hauteur, D'Aubuisson est arrivé à 0,66 pour valeur du coefficient correspondant au carré, et à 0,72, lorsque la base était 0m10, c'est-à-dire dix fois plus grande; les charges, dans les deux cas, variant de 24 à 40 fois la hauteur. Il semblait donc à ce savant physicien que le périmètre de l'orifice doit avoir une action sur le coefficient de la dépense. Cependant, frappé des résultats concluants obtenus par d'autres hydrauliciens, il s'inclina devant leur opinion et admit avec eux que,

(1) *Mémoires de l'Académie de Turin.* 1823.

(2) *Annales de chimie et de physique,* tome XLIV.

dans les orifices rectangulaires, le coefficient est *indépendant de la base de l'orifice.*

La contradiction apparente qui semble résulter des expériences précédentes doit être attribuée évidemment à une différence dans le dispositif des appareils; elle résulte surtout de ce que, dans celles de D'Aubuisson, la largeur horizontale des orifices aurait été, en second lieu, fort comparable à celle du réservoir; ce qui tend à diminuer la contraction et à augmenter la dépense, ainsi que nous le verrons quand nous traiterons des cas de contraction incomplète.

La même cause explique aussi pourquoi les orifices accolés, soumis à l'expérience par D'Aubuisson, ont donné des dépenses plus grandes (donc des coefficients plus forts) que les orifices simples de même largeur totale, *contrairement* aux résultats d'autres expériences importantes dont il sera question.

Depuis 1827, MM. *Poncelet* et *Lesbros,* officiers du génie français, ont entrepris ensemble, et le dernier a continué plus tard seul, des expériences très-multipliées sur les écoulements d'eau par des orifices rectangulaires débouchant à l'air libre.

Déjà en 1829 de nombreux et utiles résultats étaient consignés dans un mémoire lu par M. Poncelet à l'Académie des sciences; en 1832, paraissait un recueil complet (1) d'expériences relatives à des orifices verticaux rectangulaires, en parois minces, de 0^m20 de base, débouchant à l'air libre avec contraction complète, et dont la hauteur variait de 0^m01 à 0^m20; la charge était comprise entre 0^m005 et 1^m70 sur le côté supérieur de l'orifice; cette dernière, ainsi que nous l'avons déjà dit, étant la limite au delà de laquelle le coefficient de la dépense ne paraît plus éprouver de variations sensibles.

En 1850, M. Lesbros présenta à l'Académie des sciences un mémoire plus complet (2), qui s'applique encore à d'autres cas d'écoulement que nous examinerons, et au sujet desquels nous reviendrons sur l'important travail de cet ingénieur.

(1) Poncelet et Lesbros, capitaines du génie. *Expériences hydrauliques sur les lois de l'écoulement des eaux à travers les orifices rectangulaires, verticaux et à grandes dimensions.*

(2) *Mémoires présentés à l'Académie des sciences de Paris,* t. XIII. Prix de mécanique de 1850.

Nous nous bornerons, pour le moment, à examiner les résultats d'expériences cités au recueil de 1832, et rappelés dans le mémoire de 1850. La table B, qui se trouve à la fin de notre ouvrage, est un abrégé des tables plus étendues, publiées par M. Lesbros dans le mémoire précité, et auxquelles nous avons emprunté les coefficients de dépense qui se présentent le plus fréquemment dans la pratique.

Ces coefficients se rapportent tous aux orifices rectangulaires à bords horizontaux et verticaux, de 0m20 de largeur, sur des *hauteurs variables;* mais on doit les considérer comme encore bons, lorsque la plus petite dimension du rectangle est une des six hauteurs indiquées aux tableaux, c'est-à-dire un des nombres 0m20 — 0m10 — 0m05 — 0m03 — 0m02 — 0m01, pourvu que la plus grande n'excède pas 20 fois celle-là. Ceci s'appuie sur une conclusion, posée par MM. Poncelet et Lesbros, et résultant de leurs nombreuses expériences, d'après laquelle le coefficient de la dépense *dépend uniquement du plus petit côté* de l'orifice, et reste le même, toutes choses égales d'ailleurs, quelle que soit l'autre dimension, pourvu que celle-ci n'excède pas 20 fois la première. Ainsi, en appelant a la hauteur et b la largeur, le coefficient m reste constant entre les limites suivantes :

1° De $b = a$ jusqu'à $b = 20\ a$, dans la formule :

$$Q' = m.\ ab\sqrt{2gh}$$

2° De $a = b$ jusqu'à $a = 20\ b$, dans ladite formule.

L'application des nombres de la table B peut s'étendre à des orifices plus petits ou plus grands que ceux qu'elle renferme, si l'on remarque, relativement à ces derniers, que les coefficients, pour des ouvertures supérieures à 0m20 de dimension minima, doivent différer peu de ceux que donne la table, pour cette ouverture de 0m20, à en juger par la faible différence de ceux-ci avec ceux de l'orifice de 0m10.

Si l'on avait besoin de coefficient relatif à une dimension minima comprise entre les nombres 0m01 — 0m02 — 0m03 — 0m05 — 0m10 et 0m20, l'on procéderait par interpolation, de la manière suivante.

Supposons qu'il s'agisse de trouver la dépense d'un orifice rectangulaire, en mince paroi, débouchant librement dans l'air, de 0m15 de hauteur sur 1 mètre de largeur, le bord supérieur étant à 0m50 sous

le niveau du réservoir; nous supposons aussi que la contraction soit complète.

L'interpolation successive donnera :

Charge de 0^m40 *sur le bord supérieur.*

Hauteur d'orifice de	0^m10	. . . . .	0,617
Id. de	0^m20	. . . . .	0,602
Id. de	0^m15	(par interpolation) .	0,6095

Charge de 0^m60 *sur le bord supérieur.*

Hauteur d'orifice de	0^m10	. . . . .	0,617
Id. de	0^m20	. . . . .	0,604
Id. de	0^m15	(par interpolation) .	0,6105

La moyenne des nombres 0,6095 et 0,6105 donne la valeur cherchée $m = 0,610$.

Par suite :

$$Q' = 0,610 \times 0^m15 \times 1^m00 \sqrt{2 \times 9,8088 \left(0^m50 + \frac{1}{2} \cdot 0^m15\right)}$$

$$Q' = 0,610 \times 0^m15 \times 1^m00 \sqrt{19,6176 \times 0^m575}$$

$$Q' = 0,610 \times 0^m15 \times 1^m00 \times 3^m36$$

$$Q' = 0^m307$$

La dépense cherchée serait d'environ 307 litres par seconde.

La table A facilite le calcul en donnant, pour la plupart des cas de la pratique, la valeur du radical $\sqrt{2gh}$, c'est-à-dire la vitesse due à une hauteur connue. Toute vitesse en dehors des limites de la table peut y être ramenée au moyen d'une multiplication par 10^n, n étant un exposant entier, positif ou négatif. La hauteur donnée par la table, en regard de la vitesse ainsi modifiée, doit alors être divisée par 10^{2n} pour obtenir la hauteur qui correspond à la hauteur primitive.

Supposons, par exemple, que l'on demande la hauteur due à une vitesse de 0^m175 par seconde.

Le nombre 0,175 étant multiplié par 10 donne 1,75, en regard duquel on trouve dans la table 0,15611 ; le résultat demandé sera donc : $\frac{1}{10^2} + 0,15611$, ou bien 0,0015611.

Si l'on compare les résultats donnés au tableau B avec ceux qui

résultent des expériences faites par les différents auteurs cités précédemment, l'on est amené à conclure :

1° Que, pour tous les orifices en mince paroi, circulaires, carrés ou rectangulaires, avec des charges sur le sommet supérieures à 1^m30, le coefficient m de la dépense demeure sensiblement le même, et paraît être indépendant de la forme et des dimensions de l'orifice, pourvu qu'elles soient toujours très-petites par rapport à celles du réservoir, et que la contraction soit complète. D'après le tableau B, la valeur moyenne de m serait :

$$m = 0,615$$

Ce qui est conforme au résultat obtenu par les divers observateurs qui ont opéré sur de fortes charges.

2° Que le coefficient m dépend du plus petit côté de l'orifice, et demeure le même, la charge et les autres circonstances restant égales d'ailleurs, quel que soit l'autre côté, pourvu qu'il n'excède pas 20 fois le premier. Ainsi, l'orifice circulaire de 0^m05 de diamètre et l'orifice carré de même côté ont, *sous les mêmes charges,* des coefficients sensiblement égaux à ceux d'un orifice rectangulaire de 0^m05 de largeur ou de hauteur, quelle que soit l'autre dimension, censée toujours assez petite par rapport à la largeur correspondante du réservoir pour que la contraction soit complète.

3° Que les orifices pratiqués dans une paroi épaisse donnent, toutes choses égales, les mêmes résultats que ceux en mince paroi, lorsque la contraction est complète (c'est-à-dire sur tout le périmètre *intérieur*), et que le *plan de l'orifice est vertical.* Quelques auteurs donnent pour limite à cette épaisseur une fois et demie la longueur du plus petit côté de l'orifice.

La condition d'un seul plan *vertical* est essentielle. En effet, dans un cas où le bord supérieur de l'orifice était formé par l'épaisseur d'une vanne faisant saillie de 0^m05 seulement sur le plan des 3 autres côtés, M. Lesbros a constaté des augmentations variables de 0,02 à 0,06 sur les coefficients correspondants trouvés dans le cas d'un seul plan vertical.

4° Que la disposition des parois et du fond du réservoir n'a aucune influence appréciable sur la dépense, quand l'orifice en est convenablement éloigné ; mais que cette influence commence à se faire sentir

quand la distance des parois *ab* ou *cd* (fig. 10), ou celle du fond *bc*, au bord correspondant *a'b'* ou *c'd'* ou *b'c'* de l'orifice est réduite à 2, 7 fois *la largeur b'c'* de ce dernier.

II. *Orifices percés dans des parois planes épaisses*

1° Supposons, d'abord, que l'orifice soit parfaitement évasé en dedans. (Fig. 13.)

Si le conduit A'ABB' est entaillé de façon à avoir approximativement la forme et les dimensions de la veine contractée (fig. 13 1°), le résultat sera le même que pour le cas indiqué en 2° (fig. 13), c'est-à-dire, comme si A'B' était un orifice en mince paroi, et précédé d'un conduit très-court, dont l'influence retardatrice est plus ou moins insignifiante. Alors, la section extérieure AB de l'orifice devient la section contractée minima, et la dépense Q' est approximativement :

$$Q = \sigma' \sqrt{2gh} \text{ ..... } (t)$$

où σ' représente la surface de l'orifice AB.

Il résulte de plusieurs expériences assez importantes de Michelotti et de D'Aubuisson, que l'erreur commise, en prenant pour dépense réelle Q' celle qui est donnée par la formule (*t*), n'est que d'environ 2 centièmes, c'est-à-dire que le rapport $\frac{Q'}{Q} = 0,98 = m$. Cependant, comme il est difficile, en pratique, de réaliser exactement la forme d'une veine fluide contractée, il est prudent de prendre :

$$Q' = 0,96\ \sigma' \sqrt{2gh}$$

2° L'orifice étant imparfaitement évasé.

La dépense, ici, tout en étant inférieure à celle du cas précédent, serait toujours plus forte que celle de l'orifice en mince paroi, de section AB, bien entendu, parce que, des deux côtés, l'on mesure σ' à l'extérieur. Le coefficient *m* variera donc de 0,615 à 0,96.

III. *Orifices percés dans des parois non planes.*

La forme des parois du réservoir, aux environs de l'orifice, a une grande influence sur la valeur de *m*, ou de la dépense. Il est facile de

s'en rendre compte. En effet, remarquons, d'abord, que la dépense réelle serait égale à la dépense théorique, si les filets fluides arrivaient à l'orifice parallèlement entre eux; la première n'éprouve une diminution que par la perte de mouvement produite par les rencontres obliques de ces filets vers l'orifice de sortie. Si donc, autour du centre de ce dernier, l'on imagine une portion de surface sphérique, d'un rayon égal à celui de la sphère qui limite les mouvements obliques ou de la sphère d'activité de l'orifice, et qui soit limitée par les parois du réservoir (fig. 14), elle sera traversée, en tous ses points, et dans une direction presque perpendiculaire, par les filets en mouvement; plus est étendue la portion de surface sphérique, plus les directions sont obliques et même opposées; par suite, plus il y a de mouvement détruit à la sortie, et de perte sur la dépense.

Lorsque la paroi est plane (fig. 11) la surface est une demi-sphère, et l'on se trouve dans les circonstances auxquelles conviennent les coefficients de la table B. Si elle est plus ou moins concave vers l'intérieur, la calotte sphérique est plus petite, et la dépense est plus considérable; le contraire a lieu pour une paroi convexe. Le cas de la fig. 14 est encore plus défavorable que ce dernier; et l'on arriverait à un minimum de dépense pour une calotte égale à une sphère complète; ce qui se présenterait s'il était possible de transporter un orifice en mince paroi au milieu de la masse fluide. *Borda* est parvenu à réaliser ce cas d'une façon très-approchée. Il a introduit dans un vase un tube de 0^m135 de longueur (fig. 15); sous une charge de 0^m25 il a produit l'écoulement de façon que l'eau effluente ne touchât pas les parois du tube. La dépense obtenue n'a été que les 0,515 de la dépense théorique. Cependant, il résulte de quelques expériences de *Venturi*, et de diverses considérations théoriques émises par Borda que l'aire de la section contractée doit se réduire à la moitié de celle de l'orifice. L'on peut donc admettre que le coefficient de la contraction effective se trouve compris, dans tous les cas possibles, entre les limites 0,50 et 1,00; limites dont il pourra approcher de très-près, mais qu'il n'atteindra jamais.

Le cas où m atteindrait son maximum serait celui des fig. 13 et 16, dans lesquelles la paroi qui porte l'orifice aurait la forme que tend à prendre la veine fluide; l'écoulement a lieu à *plein tuyau*, mais il n'est

pas prudent, ainsi que nous l'avons déjà dit, de prendre pour m une valeur supérieure à 0,96.

IV. *L'orifice étant très-grand.*

La conduite et la distribution des eaux dans les écluses, les usines, etc., présentent un grand nombre de dispositions qui diffèrent notablement de celles que nous avons examinées jusqu'ici ; leurs orifices, entre autres, débitant des quantités d'eau considérables par rapport à celles qui correspondent aux expériences de MM. Lesbros et Poncelet, il a été nécessaire d'apprécier la vitesse d'écoulement et de constater directement le coefficient de la dépense.

Quelles que soient les dispositions adoptées, les circonstances du mouvement s'éloignent plus ou moins des hypothèses sur lesquelles est fondée la théorie adoptée précédemment ; cependant, si l'on en compare les résultats avec ceux de l'expérience, l'on peut encore arriver à des règles d'une approximation suffisante pour les applications ordinaires de la pratique.

Nous traiterons spécialement la question dans le chapitre suivant, lorsqu'il s'agira de l'appliquer aux écluses.

V. *La contraction de la veine étant incomplète.*

Il arrive parfois que la contraction de la veine fluide n'a lieu que sur une partie du périmètre de l'ouverture ; ce phénomène tend évidemment à augmenter la dépense, puisqu'il étend la section minima. Par exemple, si un orifice AB, en mince paroi (fig. 17), a l'un de ses côtés prolongé vers l'intérieur par une plaque BC, les filets liquides glissant sur ce plan arriveront à la sortie avec des vitesses normales à AB ; ce qui diminuera la contraction.

Avant les remarquables travaux entrepris par MM. Poncelet et Lesbros, l'on ne possédait que fort peu d'expériences sur les cas d'écoulements où la veine est imparfaitement contractée. Les principales étaient dues à M. *Bidone* qui a opéré sur de très-petits orifices, ayant 0^m0135 de côté en carré, et sous une charge moyenne de 0^m42, c'est-à-dire très-grande par rapport aux dimensions de l'ouverture.

Il a obtenu les résultats suivants, où m est le coefficient de la dépense en mince paroi avec contraction complète, relatif à l'orifice et à la charge que l'on considère; Bidone l'a supposé égal à 0,619.

Contraction	sur 3 côtés	$m\ (1 + 0{,}032)$
Id.	sur 2 côtés opposés	$m\ (1 + 0{,}052)$
Id.	sur 2 côtés contigus	$m\ (1 + 0{,}070)$
Id.	sur 1 côté	$m\ (1 + 0{,}121)$

D'après D'Aubuisson, l'on aurait :

$$m\,(1 + 0{,}325) = 0{,}619\ (1 + 0{,}325) = 0{,}82$$

pour le cas où l'orifice serait garni sur les 4 côtés d'une plaque analogue à BC (fig. 17), c'est-à-dire lorsque la contraction serait entièrement supprimée. Mais alors, remarquons-le, ce serait tomber dans le cas d'un ajutage rentrant; par suite, les phénomènes changent suivant que le tube est plus ou moins long. C'est ce que nous verrons plus loin.

D'après Bidone, lorsque l'orifice est rectangulaire, l'on peut aussi exprimer généralement la valeur de m par la formule :

$$m = 0{,}62 \left(1 + 0{,}152\ \frac{L}{C}\right)$$

dans laquelle C exprime le périmètre de l'orifice et L la longueur BC de la partie intérieure; mais le rapport $\frac{L}{C}$ ne peut pas trop se rapprocher de l'unité, sinon l'on arriverait à une autre catégorie de faits relatifs aux ajutages. Du reste, cette formule, déduite de quelques observations, ne mérite qu'une médiocre confiance.

Les tables B, C et D sont extraites de celles de M. Lesbros, et relatives aux cas de contraction incomplète, pour les orifices rectangulaires. D'après les résultats qui y sont consignés, l'on peut s'assurer du peu d'exactitude de la formule de Bidone.

M. Lesbros n'a point donné de formule générale pour les divers cas que nous considérons. Il s'est borné à conclure le principe suivant :

Lorsque *la contraction est incomplète,* le *coefficient* de la dépense *augmente,* non pas en raison du nombre des côtés sur lesquels la contraction est supprimée, mais en raison de la fraction du périmètre total sur laquelle cette suppression a lieu. L'augmentation de valeur

est plus notable lorsque, toutes choses égales d'ailleurs, la base est le côté ou l'un des côtés où la contraction est nulle.

Les tables E, F, dues aussi à M. Lesbros, s'appliquent à des cas particuliers de contraction incomplète, ceux de la fig. 19, où l'écoulement se fait par un orifice rectangulaire, en mince paroi, de 0^m20 de largeur, sur diverses hauteurs, et prolongé à l'extérieur par un canal rectangulaire horizontal et découvert, de même largeur que cet orifice. Dans ces circonstances, les filets peuvent, en vertu de la contraction, se détacher du fond, ou même des deux côtés latéraux, et cela sur une certaine longueur après leur sortie ; de là augmentation dans la dépense. Il suffit donc, pour les cas analogues à ceux de la fig. 21, de calculer d'abord la dépense théorique, en multipliant la section de l'orifice par la vitesse due à la charge *sur son centre de gravité ;* puis, de multiplier ce résultat par le coefficient de la table, pour obtenir la dépense réelle.

Si l'orifice n'était plus en mince paroi, mais percé sur une certaine épaisseur et évasé intérieurement, l'on pourrait admettre que la section AB (fig. 22) de l'orifice est en même temps la section contractée de la veine ; la dépense réelle s'obtiendrait alors d'une manière très-approchée par la formule (n) de Bernouilli, donnée en a au chapitre deuxième :

$$U = \sqrt{2g\left(H + \frac{P - p}{\Delta}\right)}$$

ou mieux :

$$U = 0{,}96\sqrt{2g\left(H + \frac{P - p}{\Delta}\right)}$$

et l'on tiendra compte de l'action du canal en prenant pour H la hauteur de la charge *sur le bord supérieur* A, au lieu de la mesurer sur le centre de gravité de l'orifice.

Selon que l'orifice est plus ou moins évasé, le coefficient doit varier entre 0,96 et 0,615. (Voir en II.)

VI. *Écoulement sous de faibles charges.*

Ainsi que nous l'avons déjà dit, les tables de M. Lesbros sont généralement en désaccord avec l'hypothèse admise quant à l'influence

des charges sur la valeur des coefficients de la dépense. Comme les résultats présentés par M. Lesbros s'appuient sur plus de deux mille expériences faites avec les moyens d'observation les plus exacts et garanties par des vérifications nombreuses, nous acceptons les tables de ce savant officier comme l'expression la plus approchée des phénomènes ordinaires de la pratique.

Nous ne ferons ici qu'une remarque.

Lorsque la charge est faible, il se produit, pendant l'écoulement par un orifice inférieur, un infléchissement de la surface du fluide, contenu dans le réservoir, vers la paroi dans laquelle l'orifice est percé. D'après D'Aubuisson, il faut avoir soin de mesurer la hauteur de charge en plein réservoir, c'est-à-dire en amont de la partie infléchie, le contraire pouvant produire sur la dépense une diminution sensible, s'élevant, dit-il, pour les grands orifices, jusqu'à un dixième; il cite, entre autres, le fait d'une dépression de cinq centimètres environ contre les portes d'écluse du canal de Languedoc, lorsque les deux pertuis étaient ouverts.

Il paraîtrait cependant, d'après des expériences de Poncelet et Lesbros, que de telles erreurs diminuent à mesure que les charges augmentent, et même qu'elles sont insignifiantes lorsque celles-ci excèdent 0^m15 à 0^m20.

VII. *Écoulement d'un réservoir dans un autre.*

1° *Le niveau étant constant dans les deux réservoirs.*

Cette circonstance se présente fréquemment en pratique; entre autres, dans les canaux artificiels ou les rivières canalisées, lorsqu'un bief fournit l'eau au bief suivant par un pertuis ménagé dans la porte d'écluse en dessous du niveau d'aval, tandis que cette porte retient l'eau dans le bief supérieur. Il s'agit de déterminer la quantité d'eau qui sortira par le pertuis, en l'unité de temps; par conséquent la vitesse d'écoulement.

Nous traiterons le cas général au chapitre suivant, en nous occupant des écluses, et nous démontrerons que la formule est la même que celle qui a été donnée en (n'') au § a du chapitre deuxième.

2° *Le niveau étant variable dans le réservoir inférieur.*

Le réservoir supérieur étant censé indéfini, ou bien, entretenu à un niveau constant, l'on suppose que le réservoir inférieur n'a qu'une certaine capacité, et que le niveau du liquide y monte successivement lorsqu'on ouvre l'orifice de séparation. C'est le cas d'un sas d'écluse.

La vitesse à l'orifice sera ici une quantité variable, à tout instant, puisqu'elle est due à la différence de niveau $H - h$, dans laquelle h va en croissant avec le temps. La seule question importante à traiter, dans de telles conditions, est celle de la détermination du temps nécessaire pour remplir un bassin donné, ou bien pour le vider, car les considérations seraient, dans ce dernier cas, inversement les mêmes. Nous l'examinerons plus loin.

3° *Le niveau étant variable dans les deux réservoirs.*

Ces conditions s'appliquent au cas de deux sas contigus dans une double écluse. Nous traiterons la question à la suite des hypothèses précédentes.

B. INFLUENCES D'UN RÉTRÉCISSEMENT OU D'UN ÉLARGISSEMENT BRUSQUE, DANS L'INTÉRIEUR D'UN RÉSERVOIR OU D'UN TUYAU.

a. Formules de D'Aubuisson.

Supposons qu'un liquide, s'écoulant d'un bassin de section AB = S, en surface (fig. 23), débouche tout à coup dans un réservoir *cylindrique*, ou à peu près, d'une section transversale CD = A'B' = S' plus petite que AB, et parcoure ce deuxième bassin, sur une certaine longueur, avant de s'écouler définitivement par un orifice C'D'.

Admettons provisoirement que l'on ait fermé l'ouverture A'B' par un diaphragme, ou mince plaque, percé d'un orifice $a'b'$. Lorsque le liquide du grand bassin arrivera en A'B', la veine A'B' se contractera, et elle passera par l'ouverture $a'b'$ avec une vitesse d'autant plus grande que cette ouverture sera plus petite ; par conséquent cette vitesse sera toujours *supérieure* à celle qui aurait eu lieu, dans cet endroit A'B', sans le diaphragme, c'est-à-dire *à l'entrée de l'étranglement*. L'excès de force nécessaire pour produire l'excès de vitesse

sera évidemment l'effet de l'étranglement ; ce sera la résistance qu'il aura opposée.

Soient d' et D' les diamètres des sections $a'b'$ et CD, et m' le coefficient de contraction, tel que :

$$m' . \frac{\pi d'^2}{4} = \text{section } a''b'' = \frac{\pi d''^2}{4}$$

Les vitesses étant dans le rapport inverse des sections, si l'on représente par U' celle de $a'b'$ et par u celle de CD (prise au delà de la sphère d'action de la veine), l'on obtient :

$$U' = u \frac{D'^2}{d'^2}$$

et la hauteur H correspondante est égale à :

$$H = \frac{U^2}{2g} = 0{,}051 \frac{D'^2}{d'^2} . u^2$$

Or la hauteur h de la vitesse u dans la conduite B'C'D'A' est donnée par l'expression :

$$h = \frac{u^2}{2g} = 0{,}051\ u^2$$

L'excès de hauteur ou de force, provenant de l'étranglement, sera donc :

$$0{,}051\ u^2 D'^4 \left(\frac{1}{m'^2 d'^2} - \frac{1}{D'^4} \right) \text{.....} (k)$$

Cherchons à exprimer cette perte produite par l'étranglement AB — A'B', en fonction de la dépense Q' qui a lieu dans la conduite B'D'C'A', et qui résulte de ce que la vitesse primitive V est devenue égale à u. Comme la dépense Q' s'exprime par : $u \times \pi \frac{D'^2}{4}$ ou bien : $0{,}785\ u\ D'^2$, il en résulte :

$$Q'^2 = \overline{0{,}785}^2 u^2 D'^4$$

$$u^2 D'^4 = \frac{Q'^2}{\overline{0{,}785}^2}$$

Remplaçant $u^2 D'^4$ par sa valeur en fonction de Q', l'on en conclut, pour l'excès z de hauteur provenant de l'étranglement :

$$z = 0{,}08264\ Q'^2 \left(\frac{1}{m'^2 d'^4} - \frac{1}{D'^4} \right)$$

Il suffit d'y faire $d' = D'$ pour le cas de la fig. 25, c'est-à-dire d'un *seul* rétrécissement sans diaphragme.

D'après D'Aubuisson, l'effet, dans ce dernier cas, est de fort peu d'importance ; il cite même des expériences qu'il a faites, à l'aide de *robinets-vannes* établis sur les conduites de Toulouse ; ayant diminué la section de l'une d'elles (AB) des $\frac{94}{100}$ de sa surface primitive (soit : surface $a'b' = \frac{6}{100}$ S), il n'a obtenu que $\frac{1}{100}$ de diminution sur la dépense.

Supposons maintenant qu'au lieu de laisser écouler le liquide avec une vitesse u, l'on produise un deuxième étranglement, en fermant C'D', et en n'y laissant qu'une ouverture circulaire, ou à peu près, ab, de diamètre d et de surface σ.

D'après D'Aubuisson, il suffit de déterminer les résistances z, z', z''..., etc., dues à des étranglements successifs, et de les ajouter ensemble pour avoir la hauteur correspondant à la résistance totale. Mais il a soin d'ajouter que les orifices $a'b'$, ab, etc., doivent être assez éloignés les uns des autres pour que les résistances partielles n'aient aucune influence l'une sur l'autre; c'est-à-dire, pour que l'on puisse admettre le parallélisme des tranches comme suffisamment rétabli aux endroits où l'on représente les vitesses par u, u', u'', etc. Sinon, ajoute-t-il, la veine fluide, après sa sortie du premier étranglement $a'b'$, conserverait, en tout ou en partie, l'excès de vitesse $U' - u$ qui lui a été imprimé pour y passer, et il faudrait un effort moindre pour lui faire traverser le suivant.

D'Aubuisson cite, à ce sujet, d'autres expériences faites par Eytelwein, et qui semblent confirmer l'hypothèse précédente; voici l'une des plus remarquables.

Ayant placé dans un tube, de 0^m0262 de diamètre, et à 0^m0065 l'une de l'autre, quatre petites plaques percées d'un orifice ayant également 0^m0065 de diamètre, Eytelwein observa une dépense de 0,622 par rapport à la dépense théorique correspondant à un seul orifice de même dimension, ou à un tuyau uniforme. Ayant ensuite reporté les plaques à 0^m314 les unes des autres, il remarqua une diminution énorme dans la dépense, le coefficient s'étant réduit à 0,331.

D'Aubuisson cite encore l'expérience suivante, due à *Venturi*, qui prouve que les effets des étranglements produits par des conduites

très-courtes et d'un diamètre plus petit que le réservoir sont analogues à ceux qui sont causés par de minces platines percées de petits orifices. L'appareil se composait de deux sortes de tubes (fig. 24) alternant entre eux ; les uns AA avaient 0^m0203 de diamètre et une même longueur 0^m045 ; le diamètre des autres BB était de 0^m05414 et leur longueur avait, tantôt 0^m088, tantôt 0^m172. Venturi ne fit d'abord usage que d'un seul tube B ; puis, de deux, trois, quatre et enfin cinq tubes ; il adapta successivement ces divers assemblages à un réservoir, en produisant l'écoulement avec une charge de 0^m88. Voici quelques-unes des dépenses obtenues :

Avec le tube A seul	0,001258	m. cube
Avec un tube B	0,000933	»
Avec trois tubes B.	0,000714	»
Avec cinq tubes B.	0,000572	»

D'Aubuisson convient du peu de concordance existant entre ces résultats et ceux que l'on obtiendrait par la formule :

$$0,08264\ Q'^2 \left(\frac{1}{m'^2 d'^4} - \frac{1}{D'^4}\right)$$

Que les erreurs proviennent de l'une ou l'autre cause, ces expériences de Venturi n'en sont pas moins remarquables en ce qu'elles font ressortir aussi l'effet nuisible des élargissements brusques qui est analogue au précédent. En effet, l'on peut considérer l'appareil à cinq tubes comme un tuyau de 0^m0203 de diamètre, portant les cinq renflements B. Or, il a donné pour dépense :

$$Q' = 0^{m3}000572$$

Avec un tube, de la même longueur que l'appareil complet en question, mais d'un diamètre *uniforme* de 0^m0203, Venturi a obtenu :

$$Q' = 0^{m3}000926$$

Les renflements avaient donc diminué la dépense dans le rapport de 1 à 0,62, ou de 100 à 62.

b. Méthode par le principe des forces vives.

Ainsi que nous l'avons fait remarquer, la formule de D'Aubuisson ne mérite qu'une confiance limitée. Nous allons considérer la question à son véritable point de vue, en ayant égard à la perte de

force vive qui se produit quand il existe, dans l'intérieur du réservoir, un *rétrécissement* ou un *élargissement* quelconque, qui oblige le fluide à s'y mouvoir avec une vitesse plus grande ou plus petite que celle qu'il possède un peu au delà de la section contractée ou élargie relative à cet étranglement ou élargissement, et à l'endroit où il reprend sa vitesse de régime uniforme et où le parallélisme des tranches se rétablit.

Supposons d'abord le cas où il se présente un rétrécissement (fig. 23), c'est-à-dire, où la section AB = S circulaire, rectangulaire, ou à peu près telle, se réduise brusquement à la section A'B' = S'.

Représentons par S, S', σ, σ' les surfaces des sections AB, CD, *ab* et *a'b'*; par V, U', *u*, U les vitesses en ces endroits; par *m* et *m'* les coefficients de la contraction, ou plutôt de la dépense, en *ab* et *a'b'*. Appelant encore H'' la charge sur *ab*, ainsi que nous l'avons fait au commencement de ce chapitre, au §A. *a*, et appliquant le *principe des forces vives*, de la même façon, il est facile de prouver que la quantité de travail élémentaire développée par la pesanteur sur la masse *d*M, qui s'écoule en *ab* pendant l'instant *dt*, est représentée par *gd*M. H''; que celle qui est produite par les pressions P et *p*, en BB'' et *ab*, est égale à $gdM\left(\frac{P-p}{\Delta}\right)$ où Δ exprime le poids du liquide sous l'unité de volume; enfin, que l'accroissement de force vive de la masse *d*M, en passant de AB en *ab*, est $dM(U^2-V^2)$; de sorte que, s'il n'y avait pas de force vive perdue, l'on devrait avoir :

$$dM(U^2-V^2)=2gH''dM+2g\left(\frac{P-p}{\Delta}\right)dM$$

Mais la masse écoulée, pendant l'instant *dt* par l'orifice *a'b'*, est aussi *d*M, et elle a une vitesse U' plus grande que *u*; elle vient donc rencontrer une masse *finie* A'B'D'C'; ce qui, avec l'aide de la viscosité, détruit presque instantanément le surcroît de vitesse de *d*M pour ne lui laisser que sa propre vitesse *u*, de même direction que U'; donc la force vive perdue, par l'effet du choc et de la viscosité, est $dM(U'-u)^2$ pendant l'instant *dt*. Pour un temps fini *t*, cette perte serait $\int dM(U'-u)^2 = M(U'-u)^2$, où M désigne la masse écoulée pendant le temps *t*.

De là l'équation des *forces vives* :

$$dM(U^2 - V^2) + dM(U' - u)^2 = 2gH''dM + 2g\left(\frac{P-p}{\Delta}\right)dM$$

$$(U^2 - V^2) + (U - u)^2 = 2gH'' + 2g\left(\frac{P-p}{\Delta}\right)$$

Or, d'après la loi de continuité des fluides, les vitesses sont en raison inverse des sections ; ainsi :

$$V^2 = U^2\frac{m^2\sigma^2}{S^2} \qquad U' = U\frac{m\sigma}{m'\sigma'} \qquad u = U\frac{m\sigma}{S'}$$

Remplaçant plus haut, l'on obtient :

$$U^2\left\{1 - \frac{m^2\sigma^2}{S^2} + m^2\sigma^2\left(\frac{1}{m'\sigma'} - \frac{1}{S'}\right)^2 = 2gH'' + 2g\left(\frac{P-p}{\Delta}\right) \text{ ..... } (1)$$

L'on a généralement $m' = m$, les orifices étant dans des conditions très-peu différentes.

La formule (1) que nous venons d'obtenir est relative au *cas particulier* où l'étranglement serait remplacé par le diaphragme fictif dont nous avons parlé précédemment. Quant à celle qui convient pour un rétrécissement ordinaire simple (fig. 25), il est aisé de la déduire de la précédente ; il suffit d'y introduire les hypothèses :

$$\sigma = S' \text{ et } \sigma' = \sigma = S'$$

La *formule générale d'un étranglement* est donc, en exprimant H'' par H :

$$U = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2}} \text{ ..... } (2)$$

Si l'orifice $a'b'$ est en mince paroi, $m' = 0{,}615$ à $0{,}62$, et l'on arrive à l'équation :

$$U = 0{,}84\sqrt{2gH}$$

Nous verrons, à propos des ajutages, que l'on peut considérer ce résultat comme l'expression presque rigoureuse de la réalité pratique.

Le même principe des forces vives conduit aussi facilement à l'expression de la vitesse, lorsque le liquide passe brusquement d'un réservoir à un autre de section plus étendue.

Supposons, en effet, qu'une colonne liquide aCDb animée d'une vitesse V (fig. 26), rencontre la masse A'ABB', qui possède une vitesse u, plus faible que la précédente, et s'y mêle après l'avoir heurtée.

Après quelques tourbillonnements, produits par le choc, les divers filets prendront la vitesse u, uniforme, du nouveau conduit. De là encore une certaine perte de force vive, facile à évaluer.

Désignant par S et S′ les sections ab et AB, si l'on remarque qu'il n'y a pas de contraction en ab, l'on obtient, pour valeur de la perte précitée :

$$dM\,(V - u)^2 = dM.V^2\left(1 - \frac{S}{S'}\right)$$

et l'équation (1) s'établirait par les mêmes raisonnements, sauf à y remplacer le terme $dM\,(U' - u)^2$, dû au cas de la fig. 23, par $dM\,(V - u)^2$ correspondant à celui de la fig. 26. S'il y avait contraction en ab, ce terme deviendrait :

$$dM\,(V - u)^2 = dM.V^2\left(1 - \frac{mS}{S'}\right).$$

S'il y avait, en outre, une cloison en A′B′ avec orifice, ainsi qu'à la fig. 23, il faudrait agir d'après les mêmes principes, comme à l'équation (1).

La méthode que nous venons de poser a été admise et enseignée, pendant bien des années, par M. *Steichen*, professeur de mécanique à l'école militaire de Belgique. Depuis peu, cependant, il a cru devoir corriger le terme $dM\,(U' - u)^2$ de l'équation des forces vives. Comme cet honorable savant choisit pour vérification expérimentale de ses formules un fait qui est relatif aux ajutages, nous remettrons au paragraphe suivant l'examen de sa nouvelle théorie.

c. Méthode de M. Belanger.

Malgré l'exactitude des formules précédentes, il nous paraît utile de donner un aperçu rapide de la méthode, à la fois théorique et expérimentale, due à M. *Belanger*, et basée sur l'emploi de son *piézomètre différentiel*.

I. Reprenant l'hypothèse d'une veine ab, débouchant tout à coup dans un espace à section plus grande et à peu près circulaire, rempli aussi de liquide (fig. 27), nous admettrons d'abord, avec M. Belanger, que, d'après la 4ᵉ règle donnée en *d′* § C du chapitre I, les molécules traversent les sections ab et GH avec des vitesses sensiblement rectilignes et normales ; qu'en second lieu, comme il y a dans l'espace

annulaire soumis à l'action de l'élargissement une portion de fluide animé de mouvements lents, on peut supposer que la pression sur la partie de la section AB, non occupée par la veine varie suivant la loi hydrostatique, conformément à la 2e règle du même paragraphe *d'*.

Par conséquent si l'on élève un tube piézométrique fictif, en un point quelconque de *ab* ou de A*ab*B, le niveau du liquide dans ce tube sera indépendant de son point de départ inférieur ; le même fait se produira pour une section GH. De plus, ajoute M. Belanger, les pressions moyennes sur les surfaces AB, GH, s'exerceront en leurs centres de gravité respectifs ; nous avons déjà prouvé, en *k* § B du chapitre I, l'inexactitude de cette dernière hypothèse.

Soient maintenant :

h la différence des niveaux piézométriques en AB et en GH ;

θ la charge perdue, à déterminer ;

U et *u* les vitesses moyennes du liquide en *ab* et GH ;

Δ le poids du liquide par mètre cube ;

S' la section droite du cylindre ABB'A'.

Si, comme le représente la fig. 26, le niveau piézométrique en GH dépasse de la quantité *h* celui qui répond à l'entrée de l'élargissement, l'abaissement qui a eu lieu dans le passage de U à *u* sera $-h$. L'on aura donc, d'après le théorème de Bernouilli (§ C. *g'*. III. Chap. Ier) :

$$\frac{u^2 - U^2}{2g} = -h - \theta \text{ ..... } (a)$$

d'où l'on pourra tirer θ, si l'on sait évaluer *h*. Employons, à cet effet, le théorème général de l'égalité entre les quantités de mouvement développées par les forces moléculaires, la pesanteur et les pressions ; le cylindre ABB'A' est censé ici suffisamment court pour qu'on puisse négliger l'action de *l'adhérence*.

De là l'équation :

$$\frac{\Delta}{g} S'udt\,(u - U) = -\Delta S'hdt$$

Ou bien, en divisant par $-\Delta S'dt$:

$$h = \frac{(uU - u)}{g} \text{ ..... } (b)$$

Si l'on élimine *h* entre les équations (*a*) et (*b*), l'on obtient :

$$\theta = \frac{(U - u)^2}{2g} \text{ ..... } (c)$$

C'est-à-dire que : *la perte de charge produite par un élargissement brusque de section est égale à la hauteur représentative de la perte de vitesse moyenne.*

Cette démonstration, reposant sur l'hypothèse du parallélisme des filets dans les sections où sont mesurées les vitesses u et U, pourra être considérée comme assez rigoureuse, si l'on admet, en sus, que l'extrémité D*ba*C soit évasée de manière à détruire la contraction. Dans le cas contraire, l'on ne pourrait admettre le parallélisme en *ab*, mais bien en $a'b'$, c'est-à-dire à l'endroit où la section est minima et où les filets reprennent à peu près leur direction primitive ; il suffirait donc, dans ce cas, de mesurer la vitesse U en $a'b'$ et non en *ab*.

Au lieu des vitesses U et u, difficiles à mesurer, l'auteur introduit, dans la formule, la dépense Q, dans l'unité de temps, et les sections S' de ABB'A' et σ de *ab* (ou de $a'b'$). Il obtient, pour le cas de la fig. 27 :

$$Q = S'u = \sigma U$$

$$\theta = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{S'}\right)^2$$

Et pour celui où la contraction n'est pas nulle :

$$Q = S'u = m\,(\sigma U)$$

$$\theta = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{m\sigma} - \frac{1}{S'}\right)^2$$

Ou bien encore :

$$\theta = 0{,}051\,Q^2\left(\frac{1}{m\sigma} - \frac{1}{S'}\right)^2$$

Si l'on pouvait mesurer directement la différence h des niveaux piézométriques dans les sections *ab* et GH, il suffirait de s'assurer que la hauteur observée satisfait à l'équation (b), pour avoir le droit de conclure l'exactitude de la théorie précédente ; ou bien, après avoir conclu la valeur de θ, en fonction de cette hauteur h mesurée, dans l'équation (a), et avoir exprimé u et U en fonction de Q, S' et σ, il suffirait de constater si l'on a réellement :

$$\frac{(U-u)^2}{2g} = \frac{U^2}{2g} - \frac{u^2}{2g} - h$$

L'instrument que M. Belanger a nommé *piézomètre différentiel* a

pour but de mesurer cette hauteur h, et il peut être employé pour constater, par expérience, la différence de pression entre deux points A et B (fig. 28), pourvu qu'ils soient peu éloignés.

Ce piézomètre est formé de deux tuyaux flexibles, en plomb, dont l'une des extrémités s'adapte, pour chacun d'eux, au point sur lequel on opère; à l'autre extrémité ils sont réunis par un tube en verre mCn, recourbé, et percé en C d'un trou capillaire qu'on peut à volonté ouvrir ou fermer hermétiquement.

Les robinets A et B étant fermés et les tubes remplis d'air, si l'on ouvre ces robinets après avoir au préalable fermé C, le liquide s'élèvera dans les tubes, mais ne les remplira pas, à cause de la résistance de l'air comprimé. Afin de permettre au liquide de monter jusque dans la branche courbe en verre, l'on ouvre peu à peu le robinet C jusqu'à ce qu'on aperçoive les niveaux en m et n ; la pression de l'air étant la même évidemment des deux côtés, la valeur de sa force expansive ne présente aucun intérêt, et la différence des deux niveaux liquides est la valeur de l'inconnue h à déterminer.

II. Établissons la formule de M. Belanger pour l'écoulement d'un liquide par un tuyau *court*, présentant une série d'*élargissements* brusques.

Supposons (fig. 29) que l'on adapte à un réservoir A une suite de tuyaux de faible longueur, séparés par des diaphragmes percés d'une ouverture en mince paroi b et c, tandis que deux orifices analogues a et d donnent au liquide l'entrée et la sortie. Quelle sera la vitesse à la sortie, et par suite, la dépense par l'ouverture d?

Soient :

S', S'', S'''..... les sections des tuyaux partiels ;

σ', σ'', σ'''..., σ les surfaces des orifices ;

U la vitesse du liquide dans la veine contractée, après le passage au dernier orifice d ;

z la hauteur verticale entre le niveau C du réservoir et le centre de la veine contractée après l'orifice de sortie d ;

θ la perte de charge totale éprouvée par le liquide pendant qu'il parcourt les tuyaux.

L'expression de la charge, entre un point du réservoir et le

centre de la veine contractée en d, est, comme nous l'avons vu :

$$z + \frac{P - p}{\Delta} = h$$

et comme l'on suppose dans ce réservoir une vitesse très-faible, l'on aura par le théorème de Bernouilli :

$$\frac{U^2}{2g} = h - \theta \text{ ..... } (r)$$

Admettant alors que l'effet de la viscosité puisse être négligé vu la petite longueur des tuyaux, les pertes de charge seront uniquement produites par les élargissements brusques; par suite, on pourra poser :

$$\theta = \frac{Q^2}{2g}\left[\left(\frac{1}{m\sigma'} - \frac{1}{S'}\right)^2 + \left(\frac{1}{m\sigma''} - \frac{1}{S''}\right)^2 + \left(\frac{1}{m\sigma'''} - \frac{1}{S'''}\right)^2 + \text{.....}\right] \text{.....} (s)$$

L'on aura aussi :

$$Q = m\sigma U \text{ ..... } (t)$$

Et les trois équations (r) (s) (t) entre les inconnues U, θ et Q, suffiront pour les déterminer. C'est ainsi que l'on en conclurait les formules suivantes :

1° $$Q^2 = 2g \frac{h}{\frac{1}{m^2\sigma^2} + \Sigma\left(\frac{1}{m\sigma'} - \frac{1}{S'}\right)^2}$$

la somme Σ étant étendue à tous les élargissements brusques :

2° $$U^2 = 2g \frac{h}{1 + m^2\sigma^2\Sigma\left(\frac{1}{m\sigma'} - \frac{1}{S'}\right)^2}$$

Si l'on compare les valeurs données par ces formules avec celles qu'Eytelwein a obtenues dans les expériences précédemment citées, l'on remarque un rapprochement très-notable entre les deux résultats. Ainsi, en donnant, dans la première formule, aux quantités m, α, σ', S', S''..., etc., les valeurs propres correspondant à celles d'Eytelwein, l'on obtient, avec $m = 0{,}62$, et des aires S', S'', S'''..... égales :

$$Q = 0{,}319\, S\sqrt{2gh}$$

tandis que l'expérience a donné :

$$Q = 0{,}331\, S\sqrt{2gh}$$

Il est fâcheux que ce rapprochement n'ait qu'une médiocre valeur,

par suite des irrégularités nombreuses qui existent, et que D'Aubuisson constate, dans les expériences faites par Eytelwein sur les résistances des *rétrécissements* brusques.

C. DES AJUTAGES.

Lorsqu'on adapte à un orifice, en mince paroi plane, un tuyau extérieur d'une longueur convenable, les phénomènes de l'écoulement changent, et avec eux la valeur de la dépense. L'on remarque, pour certaines dimensions du tuyau additionnel, que la veine ne se contracte pas à sa sortie CD (fig. 30), mais qu'après s'être contractée, en $a'b'$, à l'entrée du tube, elle se dilate de façon à le remplir entièrement, et que l'écoulement se fait alors à plein tuyau, ou à *gueule-bée*.

Ces tubes additionnels portent le nom d'*ajutages*.

I. *Ajutages cylindriques.*

L'écoulement a lieu à gueule-bée dans les ajutages cylindriques, lorsque leur longueur varie de 1 1/2 à 2 fois le diamètre $ab = CD$. Si elle était moindre, la veine contractée ne s'élargirait plus de façon à remplir le conduit, et l'écoulement aurait lieu comme en mince paroi.

L'ajutage cylindrique de longueur BC = 1 1/2 à 2 fois CD, modifie le coefficient de la dépense; il l'élève à 0,82 dans les mêmes cas où l'orifice en mince paroi correspondant n'aurait donné que 0,615 à 0.62.

Nous avons vu en *a* §A. Ch. II que l'équation (*n*) qui exprime, à quelques centièmes près, la vitesse d'écoulement, pour un petit orifice en mince paroi, est de la forme :

$$U = \sqrt{2g\left(H + \frac{P - p}{\Delta}\right)}$$

C'est-à-dire qu'on la suppose égale à la vitesse théorique.

Dans le cas d'un ajutage cylindrique convenable, l'on obtient :

$$U' = 0{,}82\sqrt{2g\left(H + \frac{P - p}{\Delta}\right)}$$

Ou bien :

$$\frac{U'^2}{2g} = \overline{0,82}^2 \left(H + \frac{P-p}{\Delta}\right) = 0,6724 \left(H + \frac{P-p}{\Delta}\right)$$

Et approximativement :

$$\frac{U'^2}{2g} = \frac{2}{3}\left(H + \frac{P-p}{\Delta}\right)$$

Ainsi, la hauteur correspondant à la vitesse de sortie n'est que les $\frac{2}{3}$ de la charge ; c'est-à-dire, d'après Bernouilli, la charge perdue θ est $\frac{1}{3}$ de la charge totale. Il en résulte aussi que la perte de charge θ est la moitié de $\frac{U'^2}{2g}$.

II. *Ajutages coniques convergents.*

Ces ajutages, qui se composent d'un tronc de cône ou de pyramide, dont la petite base est en dehors, augmentent, pour certaines dimensions, la dépense dans une plus forte proportion que les précédents. Aussi sont-ils presque exclusivement employés dans la pratique.

Les effets produits sont très-variés, et dépendent de l'angle de *convergence*. Il résulte des expériences de D'Aubuisson que l'ajutage conique *convergent* le plus avantageux est celui dont les côtés convergent sous un angle de 12°, et tel que sa longueur soit un peu plus grande que le double du diamètre de sortie CD. Avant et après 12° la dépense diminue, même avec la longueur précédente ; le même fait se produit si la longueur varie, l'angle de convergence restant de 12°.

Dans ces ajutages, c'est la section de l'orifice extérieur qu'il faut introduire dans l'expression de la dépense.

III. *Ajutages coniques divergents.*

Ce genre d'ajutages est peu employé ; cependant c'est celui qui donne la plus forte dépense. Bernouilli soumit leurs effets au calcul, et fit même plusieurs vérifications expérimentales. Dans l'une d'elles il trouva la vitesse réelle à l'entrée *ab* de l'ajutage plus forte que la vitesse théorique dans le rapport de 1 à 1,08. Les observations les

plus importantes sont dues à *Venturi*. Il employa des tuyaux ayant à peu près la forme *aa'*CD*b'b* (fig. 31) de la veine contractée, et conclut : que l'ajutage *divergent* de plus grande dépense doit avoir, en longueur 9 fois le diamètre de la petite base *ab* des troncs de cône formant le tuyau, et un évasement de 5° 6′ ; il donnerait, d'après l'auteur, une dépense 2,4 fois plus forte que l'orifice en mince paroi *ab*, et 1,46 fois plus grande que la vitesse théorique. Venturi ajoute cependant que les dimensions doivent changer avec la charge pour conserver le maximum ; celle qu'il employa dans ses expériences fut constante et égale à 0m88.

IV. *De l'action des ajutages.*

L'on a expliqué de diverses manières l'effet produit par les ajutages sur la dépense. D'Aubuisson suppose qu'après s'être contractée en *a'b'* (fig. 30) à une distance égale au rayon $\frac{a'b'}{2}$, si le tuyau est cylindrique, la veine ne conserve plus la forme cylindrique ordinaire à partir de *a'b'*, mais que, soit par une direction divergente, qu'il n'explique pas, soit par une action attractive des parois, quelques filets sont portés vers celles-ci et s'y rattachent, entraînant avec eux les filets voisins.

L'on a attribué longtemps l'action des ajutages à une diminution de contraction, c'est-à-dire à un accroissement du diamètre *a'b'*, par suite de l'attraction des parois. Mais il résulte d'une expérience de *Venturi* que la contraction, soit avec un ajutage tronconique (fig. 31), soit avec un tube cylindrique de même longueur, est, à très-peu près, égale à celle des orifices en mince paroi ; seulement, par l'effet de l'ajutage, la vitesse du fluide en *a'b'* serait augmentée dans le rapport de 41 à 31 environ ; de là l'augmentation dans la dépense. Venturi expliquait cette accélération de vitesse par une plus forte valeur de $\frac{P - p}{\Delta}$ résultant d'une certaine dilatation de l'air autour de la veine fluide, vers l'endroit de la contraction.

Cette hypothèse est encore admise aujourd'hui par la plupart des physiciens ; et nous l'admettons jusqu'à preuve du contraire.

Nous avons vu que, d'après les expériences de Castel, Eytelwein, Venturi et Michelotti, la dépense, par un ajutage cylindrique convenable, est donnée par la formule :

$$Q = 0{,}82\, S \sqrt{2g\left(H + \frac{P - p}{\Delta}\right)}$$

Ou, pour $P = p$:

$$Q = 0{,}82\, S \sqrt{2gh}$$

dans laquelle S est la section normale de l'ajutage.

Puisque le jet liquide sort à plein tuyau, en filets parallèles, il suit de là que le coefficient $m = 0{,}82$, ne peut affecter que la vitesse; par suite, le rapport m de la dépense réelle $m\, S \sqrt{2gH}$ à la dépense théorique $S \sqrt{2gH}$ sera aussi celui de la vitesse réelle à la vitesse théorique. Ainsi, l'on peut admettre que la vitesse d'un jet (vertical ou autre) à la sortie d'un ajutage cylindrique n'est que les 0,82 de celle qui est due à la hauteur du niveau dans le réservoir.

La valeur $m = 0{,}82$, obtenue par les divers savants précités, va nous servir à démontrer l'exactitude des formules du § B. *a* du chapitre II ; il en résultera que la théorie dont elles dérivent est basée sur une hypothèse, celle du parallélisme des tranches, qui doit être l'expression à peu près rigoureuse de la réalité.

Reprenons la formule :

$$U = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \left(\frac{1}{m'} - 1\right)}} \quad \text{.....} \quad (2)$$

qui se rapporte au cas (fig. 25) d'un seul rétréissement brusque, dans un cylindre *assez court*. Nous avons vu que, pour un orifice en mince paroi, $m' = 0{,}615$ à $0{,}62$; d'où :

$$U = 0{,}84 \sqrt{2gH}$$

Cette formule est donc l'expression de la vitesse *théorique* par un tuyau *court* cylindrique, c'est-à-dire par un ajutage de même section; et la différence avec la vitesse réelle donnée par expérience n'est que de $\frac{1}{42}$.

M. *Navier*, et la plupart des auteurs contemporains, attribuent

cette faible différence à ce qu'on a négligé de tenir compte de la viscosité, *qui agit toujours*, plus ou moins, quelle que soit la longueur du tuyau, *chaque fois qu'il y a étranglement*. C'est ce que l'honorable M. *Steichen* a perdu de vue en voulant corriger les formules en question.

Après avoir posé l'équation :

$$dM\,(U^2 - V^2) = 2gH''dM + 2g\left(\frac{P - p}{\Delta}\right) dM$$

il continue comme suit :

« La masse dM, écoulée, pendant l'instant dt par la section $a'b'$, a une vitesse U' plus grande que celle u des tranches qu'elle vient choquer; et, comme ces dernières constituent une masse finie, par rapport à dM, il s'ensuit que celle-ci, après le choc, ne possède plus que la vitesse commune u; elle a donc perdu une vitesse $(U' - u)$, car U' et u ont même direction.

Or, en passant de la section contractée $m'\sigma'$ à la section S', partant, de la vitesse U' à u, la masse dM perd une force vive $dM\,(U'^2 - u^2)$; et, comme, en chaque instant dt, la section $m'\sigma'$ laisse passer une masse dM, tout a lieu de la même manière que si une telle masse passait de la vitesse U' à u; cette masse perd donc une vitesse $(U' - u)$, et exerce par conséquent un effort d'inertie $k\,dM\,\frac{U' - u}{dt}$, k marquant un nombre compris entre 0 et 1 dont la valeur moyenne doit être 0,70 environ; mais pendant l'instant dt le point d'application de cette force, inhérent à dM, décrit un chemin dû à la moyenne $\frac{(U' + u)}{2}$ des deux vitesses extrêmes et le moment virtuel utile de cet effort a par conséquent la valeur :

$$K \cdot \frac{dM\,(U' - u)}{dt} \cdot \frac{U' + u}{2} \cdot dt$$

ou bien :

$$\frac{1}{2}\,KdM\,(U'^2 - u^2)$$

C'est l'effet utile *communiqué par le choc*, tandis que l'effet utile perdu est $\frac{1}{2}\,dM\,(U'^2 - u^2)$.

La perte momentanée et totale d'effet utile est donc :

$$\frac{1}{2}(1 - K)(U'^2 - u^2)\,dM$$

et l'équation générale des forces vives doit être posée ainsi :

$$dM\,(U^2 - V^2) + (1 - K)(U'^2 - u^2)\,dM = 2gH''dM + 2g\left(\frac{P - p}{\Delta}\right)dM$$

Celle-ci donne, quand on y exprime toutes les vitesses en fonction de U' :

$$U'^2\left[1 - m^2\frac{\sigma^2}{S^2} + (1 - K)\,m^2\sigma^2\left(\frac{1}{m'^2\sigma'^2} - \frac{1}{S'^2}\right)\right] = 2gH'' + 2g\left(\frac{P - p}{\Delta}\right)$$

Telle est l'équation générale, d'après M. Steichen.

Faisant ensuite : $\frac{\sigma^2}{S^2}$ = zéro, comme quantité insensible; $P = p$; $\sigma' = S'$; $\sigma = S'$ et $m = 1$, l'écoulement se faisant alors à plein tuyau, il obtient pour la vitesse de sortie en *ab* (fig. 25) :

$$u = \frac{\sqrt{2gH''}}{\sqrt{1 + (1 - K)\left(\frac{1}{m'^2} - 1\right)}}$$

Or, en prenant :

$$m' = 0{,}61 \text{ et } K = 0{,}70$$

l'on arrive à l'équation :

$$u = 0{,}814\sqrt{2gH''}$$

« Ainsi, ajoute l'auteur, l'on reproduit, à quelques millièmes près, la valeur du coefficient de la dépense par les ajutages cylindriques, valeur comprise entre 0,81 et 0,82. »

C'est vrai, mais à quel prix ! Loin de prouver, par ce résultat, la supériorité de sa méthode, M. Steichen aurait dû y voir l'inexactitude de son point de départ, c'est-à-dire l'appréciation erronée des forces auxquelles il faut attribuer la perte de vitesse $U' - u$.

En effet, si l'on examine ce qui se passe en réalité, l'on trouve d'abord qu'une certaine vitesse est perdue par la rencontre de la masse liquide venant de *a'b'* avec celle qui se trouve dans le réservoir B'D'C'A' (fig 23). Cette perte a-t-elle lieu instantanément ? Non, évidemment; les tourbillons le prouvent; en outre, il faut remarquer que l'on a soin de ne mesurer la vitesse restante qu'à une certaine

distance de l'orifice d'amont. L'on ne peut donc admettre l'action de cette première force comme analogue à celle qui serait produite par le choc de deux corps durs. En second lieu, ce n'est pas à cette force seule qu'il faut attribuer la *perte totale* $U' - u$; la *viscosité* joue ici un rôle aussi important par son adhérence que par sa cohésion, à cause même de l'étranglement qui bouleverse les molécules liquides.

Cela posé, voyons quelles causes d'inexactitudes, ou au moins d'erreurs, se trouvent implicitement renfermées dans la théorie corrective de M. Steichen.

1° La perte de vitesse $U' - u$ n'est pas due uniquement à la rencontre des masses fluides.

2° Cette perte *totale* $U' - u$ n'a pas lieu instantanément (quoique nous l'ayons admis plus ou moins dans notre méthode, *ce qui contribue logiquement* à apporter une différence avec la pratique) ; par suite, il n'y a pas lieu de représenter l'effort d'inertie par une expression de la forme $K \frac{dM\,(U' - u)}{dt}$, bonne, *tout au plus*, si l'on admettait un choc brusque.

3° La valeur moyenne $\frac{U' + u}{2}$ n'est pas plus orthodoxe quand on l'applique aux deux résistances en jeu.

4° Il n'est pas jusqu'au coefficient k qui ne soit sujet à caution. D'après M. Steichen, sa valeur *doit être* 0,70 *environ ;* cela se voit bien, s'il doit satisfaire au résultat final $U' = 0{,}814 \sqrt{2gH}$. Mais tant qu'il n'est pas bien prouvé que k doit forcément être égal à 0,70 la formule précédente mérite simplement le nom de formule *empirique*. Elle en possède, en effet, toutes les qualités : ainsi, quoiqu'elle néglige l'action d'une force réellement en jeu, elle donne exactement les résultats de l'expérience ; et pour que les conditions ordinaires soient toutes remplies, il ne lui manque même pas l'indispensable coefficient de correction.

CHAPITRE TROISIÈME.

APPLICATIONS.

A. DES DÉVERSOIRS.

Nous avons vu, au chapitre précédent, que la formule de la dépense théorique, pour un orifice assez petit et en mince paroi, est la suivante :

$$Q' = S\sqrt{2gH'}$$

Si l'orifice est rectangulaire, la section S peut se représenter par Lz, où L est la largeur et z la hauteur ; de là :

$$Q' = Lz\sqrt{2gH'}$$

Pour appliquer à cette formule les notations de la fig. 32, il suffit d'y faire $z = H - h$ et $H' = AB = \frac{H + h}{2}$; l'on obtient alors :

$$Q' = L(H - h)\sqrt{2g\left(\frac{H + h}{2}\right)}$$

Quant à la dépense réelle Q, c'est l'expression qui précède multipliée par le coefficient de correction m, dont la valeur moyenne est 0,61 à 0,62, d'après MM. Poncelet et Lesbros :

$$Q = mL(H - h)\sqrt{2g\left(\frac{H + h}{2}\right)}$$

Ou bien :

$$Q = \sqrt{\frac{1}{2}}\, mL(H - h)\sqrt{2g(H + h)}$$

Soit :

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\, m = m'$$

$$Q = m'L(H - h)\sqrt{2g(H + h)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Ceci posé, si, au lieu d'un orifice mn, l'on pratique une échancrure rectangulaire découverte à sa partie supérieure A, et telle que le côté inférieur n soit une horizontale, la formule (1) devient, en y faisant $h = o$:

$$Q = m'LH\sqrt{2gH} \text{ ..... } (2)$$

Or, les circonstances que nous venons de supposer sont celles d'un *déversoir*, c'est-à-dire, d'un orifice découvert à sa partie supérieure, et dont le bord inférieur est une droite horizontale appelée *seuil*.

Il nous reste à prouver que la formule (2) exprime rigoureusement la dépense réelle ; que, par conséquent, elle a été légalement déduite. Il faut avoir soin de remarquer néanmoins que nous avons négligé la vitesse v que le liquide pourrait avoir à l'amont du déversoir, ou plutôt en amont du point C (fig. 33) où la surface commence à s'infléchir vers le seuil. Le plus souvent, il est impossible d'admettre que le fluide soit en repos à son arrivée au point C ; il faut alors remplacer H par $H + h'$, la valeur de h' étant donnée par l'équation : $v^2 = 2gh'$.

L'on admettait primitivement que les filets liquides, après avoir parcouru la courbe parabolique Cm (fig. 33), avaient acquis, en m, la vitesse due à une hauteur A$m = h$; que, par suite, l'écoulement se faisait comme par un orifice rectangulaire mn (fig. 32) ; c'est-à-dire que la dépense s'exprimait par la formule (1), légèrement modifiée quant à la valeur de m' : l'on augmentait un peu ce dernier par le motif que la veine ne se contracte pas, en réalité, sur le bord supérieur m.

Mais l'expérience a fait voir qu'il n'en est pas ainsi, et que l'on se rapproche bien plus de la réalité en calculant la dépense comme s'il n'y avait pas d'inflexion, et que, par exemple, l'orifice fût reculé en CD sur toute la hauteur H.

C'est, en d'autres termes, introduire $h = o$ dans la formule (1), ainsi que nous l'avons fait.

Quant au coefficient m', cherchons quelle doit être sa valeur, logiquement calculée ; nous verrons ensuite celle qui a été donnée par expérience.

Si, dans la relation :

$$m' = m\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Nous remplaçons m par sa valeur 0,615 qui correspond aux orifices rectangulaires, il arrive :

$$m' = 0{,}615 \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$m' = 0{,}615 \times 0{,}707 = 0{,}435$$

Or, il résulte de nombreuses observations faites par Dubuat, Brindley, Smeaton, Eytelwein, D'Aubuisson et Bidone, que le coefficient m' varie de 0,40 à 0,47 suivant les charges, et que sa moyenne est d'environ 0,42.

MM. Poncelet et Lesbros ont fait aussi plusieurs séries d'expériences, à l'aide du grand appareil avec lequel ils avaient déjà fait celles que nous avons rapportées pour les orifices en mince paroi (voir les tables). Nous rapportons, à la table F, un extrait des nombreux résultats qu'ils ont obtenus. La largeur du déversoir était constante, et égale à 0^m20.

Cette table présente une conclusion remarquable, c'est que le coefficient diminue notablement à mesure que la charge augmente. Ce fait est en opposition complète avec les phénomènes observés par Eytelwein, Bidone, D'Aubuisson, etc. Mais il est à remarquer qu'Eytelwein et Bidone, dans leur manière de déterminer les coefficients, n'ont point su tenir compte exactement de la vitesse $v = \sqrt{2gh'}$ qu'avait le liquide à son arrivée en m (fig. 33); Eytelwein l'a complétement écartée, et s'est servi simplement de la formule :

$$Q = m'LH\sqrt{2gH}$$

et les valeurs qu'il a trouvées pour m' n'offrent aucune continuité dans la variation. D'Aubuisson a introduit l'action de v dans les différents cas examinés par Eytelwein. A cet effet, il s'est servi de la formule :

$$Q = m''LH\sqrt{2g\left(H + \frac{v^2}{2g}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Pour déterminer v, vitesse à la surface, il a cherché, par expérience, la vitesse moyenne U en divisant la dépense par la section $L'(H + np)$ où L' est la largeur du canal. Il en a conclu v par la formule de De Prony : $U = 0{,}80\ v$. Comparant alors les données d'expérience avec les valeurs de Q tirées de l'équation (3) il a recueilli

une série de valeurs m'', aussi peu régulière que celle d'Eytelwein, mais dont la tendance générale se rapproche davantage des conclusions de MM. Poncelet et Lesbros.

Bidone, dans ses expériences, a distingué les deux cas, de $v = o$ ou à peu près, et de $v = \sqrt{2gh'}$, c'est-à-dire, le cas où la section de la masse fluide au-dessus du seuil est assez petite, et celui où elle est grande par rapport à la section du canal, un peu avant d'atteindre le seuil.

Le canal employé avait 35 mètres de longueur, et une largeur de 0^m643. L'eau était reçue, pendant quelques minutes, dans un bassin de jaugeage, et la dépense Q était ainsi connue.

Pour réaliser d'abord les conditions d'une vitesse v très-faible, il fut établi, à l'extrémité du canal, trois déversoirs tels que leur section respective LH fût 22, 17 et 15 fois plus petite que celle du prisme liquide en amont, abstraction faite de toute contraction ou inflexion. Bidone trouva, en moyenne :

$$m' = 0,403$$

calculé sur la formule :

$$Q = m'LH\sqrt{2gH} \text{ ..... } (2)$$

Dans le second cas, le même canal fut barré sur toute sa largeur, et sur une hauteur constante de 0^m1557 au-dessus de son radier. Bidone fit six expériences, en modifiant successivement le niveau CA de façon à porter la section du courant de 3,18 à 1,80 fois celle au déversoir, c'est-à-dire LH étant 1. Si l'on calcule, d'après ces expériences, les valeurs correspondantes de m', par la formule (2) d'une part, et celles de m'', par la formule (3) d'autre part, l'on obtient, en moyenne :

$$m' = 0,400 \text{ et } m'' = 0,380$$

Ici encore les valeurs de m', quoique d'une variation irrégulière, semblent croître avec les charges ; le contraire se produit pour m''.

Bidone a calculé les coefficients de la dépense de la même façon, dans les deux cas précités, c'est-à-dire, au moyen de la formule (2). Il en est arrivé à conclure que ces valeurs sont presque identiques, soit pour une vitesse primitive v presque nulle $\left(\frac{1}{22}\right)$, soit pour v

égal à $\frac{1}{3}$, et même davantage, de celle avec laquelle le liquide franchit le seuil. L'on s'explique facilement l'origine de cette erreur par cette circonstance que, dans les résultats de Bidone, H est donné comme étant la hauteur à laquelle l'eau s'élevait dans la branche verticale d'un tube recourbé, dont la branche horizontale, plongée dans le liquide qui arrivait au déversoir, en recevait le choc; or cette hauteur n'est plus H, dans l'acception de nos formules, c'est-à-dire la différence de niveau entre le seuil m et le niveau CA, censé non infléchi: une telle hauteur est $H + \frac{v^2}{2g}$. Cependant comme Bidone dit formellement (1) dans son mémoire que la hauteur de l'eau dans le tube a toujours été la différence de niveau précitée, ou H, il est impossible de tirer la moindre conclusion sérieuse d'expériences qui eussent été très-importantes si H y eût été déterminé d'une façon claire, et non avec la double incertitude d'un instrument inexact et d'une vitesse additionnelle imparfaitement indiquée.

Quelques observations faites par D'Aubuisson, sur un déversoir de 0^m30 de largeur, ne présentent rien de remarquable; sa moyenne a été : $m' = 0,41$, et le coefficient paraissait encore croître avec la charge.

Si l'on considère les résultats de la colonne 1 de la table F, colonne qui correspond à une contraction complète, c'est-à-dire à un déversoir en mince paroi dont le seuil est assez éloigné du fond et des parois latérales du canal d'amont, l'on remarque que m' n'a pas une valeur constante, mais qu'elle suit une série décroissante continue, sans être progressive, depuis la plus faible charge jusqu'à la plus forte employée; qu'en second lieu, elle a varié de 0,371 à 0,424, dans les limites des expériences ; la moyenne serait donc environ :

$$m' = 0,405$$

Mais, notons-le bien, cette valeur doit varier suivant la charge, ou plutôt suivant le rapport $\frac{H}{L}$, car, d'après la colonne 3 de la table F, la contraction latérale a une influence notable; et, comme les plus

(1) *Mémoires de l'Académie des sciences de Turin*, 1824, t. XXVIII; *Expériences sur la dépense des réversoirs*, par Georges Bidone.

fortes valeurs de m' correspondent aux plus petites charges, l'influence de la contraction est d'autant plus forte que la charge devient une fraction plus grande de la longueur L.

La moyenne $m' = 0,405$ se rapproche beaucoup de celle de Bidone ; l'on pourra donc, dans la pratique, adopter la formule de cet éminent hydraulicien, pour calculer la dépense :

$$Q = 0,405\ LH\sqrt{2gH} \ldots\ldots\ldots (a)$$

pourvu que la section du réservoir soit fort grande relativement à celle de l'orifice. Si la contraction était supprimée latéralement, c'est-à-dire, si le déversoir était établi sur toute la largeur du barrage, l'on prendrait :

$$Q = 0,45\ LH\sqrt{2gH}$$

conformément à la moyenne des résultats de la colonne 3. Quant à l'influence d'une contraction nulle sur le fond, elle est trop peu importante pour en tenir compte, à moins que la charge ne devienne très-forte, ainsi que semble l'indiquer la colonne 2 de la même table.

Concluant d'expériences déjà mentionnées, Bidone a trouvé que le coefficient m' reste à peu près constant et égal à 0,405 environ, que les bords verticaux de l'orifice fussent ou non dans le prolongement des faces latérales et parallèles du réservoir, le fond de ce dernier restant à une certaine distance du seuil. Nous avons fait remarquer combien ces expériences de Bidone présentent d'incertitudes.

M. *Steichen* (1) explique le peu d'influence soi-disant produite par la suppression de la contraction latérale des orifices en déversoirs par l'augmentation sensible des résistances dues aux parois verticales du canal d'amont, résistances dont l'effet serait de détruire une certaine partie de la charge génératrice ou de la vitesse d'écoulement au sortir de l'orifice.

Les résultats des expériences de MM. Poncelet et Lesbros rendent cette explication complétement inutile, en réduisant à néant le principe.

(1) *Cours de mécanique appliquée donné à l'École militaire de Belgique.*

La formule pratique (a) est donnée par D'Aubuisson sous une autre forme, au moyen des transformations suivantes :

$$Q = m'LH\sqrt{2gH} = m'\sqrt{2g.}\ LH\sqrt{H} = 0{,}405\sqrt{2g.}\ LH\sqrt{H}$$

$$Q = 1{,}80\ LH\sqrt{H} \quad \ldots\ldots\ldots \ (b)$$

Le multiplicateur 1,80 correspond à une valeur de $m' = 0{,}405$, et par suite, à une valeur de $m = 0{,}567$ au lieu de 0,615, coefficient moyen des orifices en mince paroi. L'expérience a donc tenu compte de la différence qui existe entre un orifice ordinaire et un déversoir.

Les formules (a) ou (b) servent à résoudre toutes les questions où l'une des trois quantités Q, H, L est inconnue. En voici deux exemples.

I. Étant supposé un bassin entretenu par un cours d'eau qui fournit 3^{m3} par seconde, à quelle profondeur, en dessous du niveau, faut-il établir le seuil d'un déversoir, de 2^m de largeur, pour que ce niveau reste constant?

L'on posera : $Q = 3$, $L = 2$ dans la formule (b), par exemple, après y avoir exprimé H en fonction de Q et L :

$$H = \sqrt[\frac{3}{2}]{\frac{Q}{1{,}80\ L}} = 0{,}676\sqrt[3]{\left(\frac{Q}{L}\right)^2}$$

$$H = 0{,}676\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$H = 0{,}88$$

II. Ce deuxième problème est emprunté à D'Aubuisson : étant donné un étang, alimenté par un ruisseau et se vidant par un déversoir de 1^m30 de largeur, l'on suppose qu'à certaines époques il arrive des crues, telles que les eaux s'élèvent à 1^m25 au-dessus du seuil, et qu'il se produise des inondations en amont. Afin d'éviter cet inconvénient on veut baisser de 0^m65 le niveau de ces grandes eaux, et en même temps s'arranger de façon qu'elles ne s'élèvent pas à plus de 0^m60 au-dessus du seuil; quelle sera la largeur à donner au déversoir pour réaliser cette combinaison ?

La dépense Q est donnée ici implicitement, par l'hypothèse que le niveau s'élève de 1^m25 quand $L = 1^m30$; l'on en conclut :

$$Q = 1^m80 \times 1^m30 \times 1^m25 \times \sqrt{1^m25} = 3^{m3}27$$

Le problème revient à celui-ci : étant donné une dépense $Q = 3^{m3}27$ et une charge $H = 0^{m}60$ que l'on veut avoir au-dessus du seuil, déterminer la largeur L. De là :

$$L = \frac{Q}{1,80\, H \sqrt{H}}$$

$$L = \frac{3,27}{1,80 \times 060 \sqrt{0,60}} = 3^{m}909$$

Il peut arriver que l'on n'ait pas à sa disposition les moyens de nivellement nécessaires pour déterminer directement H. Comme il est toujours facile de mesurer *mn* (fig. 33) ou l'épaisseur $H - h = H'$ de la lame d'eau sur le seuil (en mince paroi), plusieurs savants ont cherché la relation qui pourrait relier entre elles ces deux quantités.

Dubuat admettait que le rapport $\frac{H'}{H}$ fût constant et égal à 0,50. Dans la seconde des expériences d'Eytelwein, citées plus haut, ce rapport a varié d'une observation à l'autre, et il s'est rapproché d'autant plus de l'unité que le déversoir était plus étroit et la charge plus forte.

Guidé par de hautes considérations théoriques, Navier le porta à 0,725 ; Robisson le trouva égal à 0,714 ou $\frac{5}{7}$, à la suite de mesures effectives opérées directement.

D'après quelques observations faites sur de larges barrages, D'Aubuisson admit d'abord cette dernière valeur ; mais d'autres expériences vinrent lui démontrer que le rapport $\frac{H'}{H}$ est variable, et qu'il croît en raison inverse du rapport $\frac{L}{L'}$ où L est la largeur du déversoir et L' celle du bassin d'amont.

Depuis, MM. Poncelet et Lesbros ont reconnu en outre que H' croît avec la charge H. Comparant leurs observations aux résultats des mesures prises par Bidone et Eytelwein, ils ont établi la relation suivante entre H et H', pour tous les cas où $\frac{L}{L'}$ est inférieur à 0,40, c'est-à-dire pour ceux où la largeur L' du bassin d'arrivée est au moins 5 fois celle du déversoir :

$$H = H' + 0,0009 + \sqrt{KH' + 0,00000081} \quad \ldots\ldots\ (c)$$

dans laquelle :

$$K = 0{,}0000196 \left[19 \times \left(\frac{100\,L}{L'} - 15{,}50 \right)^2 \right]$$

Cette formule d'interpolation (*c*) peut se représenter comme suit, en exprimant le tout en millimètres :

$$H = H' + 0{,}90 + \sqrt{KH' + 0{,}81}$$

$$K = 0{,}0196 \left[19 + \left(100 \frac{L}{L'} - 15{,}50 \right)^2 \right]$$

Nous avons vu, dans le chapitre II, que si un orifice en mince paroi est suivi d'un canal découvert de faible pente, le coefficient de correction de la dépense théorique $Q = \sigma \sqrt{2gH}$ (où H est la charge sur le centre) est généralement plus faible que celui qui convient aux cas analogues d'un orifice simple sans canal supplémentaire. (Voir les tables B', C', D', E' de Lesbros.) L'influence du canal additionnel est cependant presque nulle quand la charge devient forte.

Le même phénomène se présente pour un déversoir lorsque le seuil *n* (fig. 34) est prolongé par un canal ou coursier découvert de même largeur et de faible pente. Le coefficient m'' y est inférieur au coefficient m' de la formule $Q = m'LH\sqrt{2gH}$ correspondant aux cas analogues, mais sans coursier dans le prolongement, et sa valeur est susceptible de varier notablement d'un réservoir à un autre.

D'après les expériences de M. *Christian*, le rapport $\frac{m'}{m''}$ serait égal à 0,96 ; de sorte que, pour $m' = 0{,}405$ l'on aurait $m'' = 0{,}405 \times 0{,}96 = 0{,}39$. Mais cette valeur est un peu trop forte ; elle correspond d'ailleurs à l'hypothèse de $L = L'$, c'est-à-dire d'une contraction nulle sur les faces latérales. Il résulte des observations de MM. Castel et Lesbros que l'on peut prendre *moyennement* pour m'' la valeur $\frac{7}{9}\,m$, et pour formule :

$$Q = 0{,}35\ LH\sqrt{2gH}$$

en admettant toutefois que le seuil soit raccordé au canal d'amont par des courbes destinées à diminuer la contraction vers l'orifice.

Si la vitesse d'arrivée v en C est assez sensible, il faut en tenir compte; la formule devient alors :

$$Q = 0{,}35\ LH\sqrt{2g\left(H + \frac{v^2}{2g}\right)}$$

Du reste, nous le répétons, ce coefficient m'' varie d'un déversoir à l'autre, ainsi qu'on peut s'en assurer par les résultats de la table G, due, comme les autres, à M. Lesbros.

B. DES VANNES.

a. Vannes verticales.

I. *L'écoulement étant permanent, et à niveau constant.*

Dans toutes les circonstances de l'écoulement des liquides par un orifice percé dans un réservoir, nous avons pris pour vitesse moyenne de la veine celle qui correspondait à la charge sur le centre de cet orifice. Nous avons admis en outre l'hypothèse du parallélisme des tranches ou de l'égalité des vitesses en tous les points de la section de sortie.

Lorsque les ouvertures d'écoulement ont des dimensions assez grandes, ou bien encore lorsque l'orifice n'est pas petit par rapport à la charge H, comme cela se présente ordinairement pour les vannes, les suppositions admises plus haut ne sont plus tout à fait exactes, au point de vue de la théorie. Il devient alors plus rigoureux de limiter l'hypothèse des vitesses égales aux filets fluides qui se trouvent à une même distance en dessous du niveau du réservoir; divisant ensuite l'orifice en tranches horizontales fictives d'épaisseur infiniment petite, l'on calcule, par intégration, la dépense qui se fait par l'ensemble de ces tranches, c'est-à-dire par l'orifice d'écoulement.

Adoptant les notations de la fig. 32, l'on obtient pour la dépense théorique :

$$Q = L\int_h^H dz\sqrt{2gz}$$

Car la dépense par une tranche élémentaire est $L\ dz\sqrt{2gz}$, où z est la charge, c'est-à-dire la profondeur de cette tranche en dessous du niveau AC.

De là :

$$Q = \frac{2}{3} L \sqrt{2g} \left(H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3} L \left(H \sqrt{2gH} - h \sqrt{2gh}\right)$$

Ou bien :

$$Q = 2{,}866\, L \left(H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}}\right) \text{ ..... } (m)$$

Nous avons vu que, pour un orifice assez petit, la formule dans les mêmes circonstances serait :

$$Q' = L\,(H - h) \sqrt{2g \left(\frac{H + h}{2}\right)} \text{ ..... } (n)$$

Or, dans un *mémoire sur le jaugeage des eaux courantes*, M. De Prony a prouvé que les équations (m) et (n) ne diffèrent entre elles que par un coefficient variable, s'éloignant fort peu de l'unité ; ce résultat est confirmé par les expériences de M. Lesbros qui a déterminé les coefficients de correction dans l'une et l'autre formule. L'on peut en conclure que les résultats des expériences sur l'écoulement des liquides sont représentés avec autant de continuité et de régularité par la relation (n) qui est la plus simple ; les coefficients de correction à employer ne sont pas plus constants pour l'une que pour l'autre de ces formules, et, sauf le cas d'une charge excessivement petite, ils ne diffèrent presque pas entre eux.

Nous prendrons donc, pour tout orifice, la relation :

$$Q = m' L\,(H - h) \sqrt{2g \left(\frac{H + h}{2}\right)}$$

comme expression de la dépense effective.

Généralement, lorsqu'on ouvre une vanne, la masse liquide ne s'écoule pas directement à l'air libre en décrivant sa parabole ; le pertuis est souvent prolongé par un canal découvert d'une faible longueur et d'une pente plus ou moins rapide ; dans le cas le plus ordinaire le fond et les côtés du coursier sont dans le prolongement des bords intérieurs de l'orifice. (Fig. 35.)

D'après Bossut, la dépense serait la même que si le pertuis n'était pas prolongé ; et Dubuat a admis cette hypothèse pour tous les cas où il n'y a pas *remous*, c'est-à-dire pour ceux où l'eau du coursier ne vient pas refluer vers l'orifice, et modifier ainsi la veine et la vitesse.

Cette dernière condition implique la nécessité d'une forte charge et d'une grande ouverture d'écoulement, ce qui se présente le plus fréquemment dans la pratique.

Quoique les expériences de Lesbros, indiquées aux tables B'C'D'E', se rapportent à un coursier horizontal, l'on peut en conclure que l'influence d'un canal additionnel découvert est nulle pour de fortes charges, et qu'elle va en croissant à mesure que celles-ci diminuent, contrairement à ce qui se passe dans les orifices en mince paroi, assez *petits* et débouchant librement dans l'air.

Faute des tables précitées, l'on peut admettre que la vitesse est altérée par le coursier dans le même rapport que par l'existence d'un étranglement brusque. Ainsi, appelant encore m'' le coefficient m' modifié par l'action du conduit supplémentaire, le rapport $\frac{m''}{m'}$, ou des vitesses, serait donné par l'expression :

$$1 : \sqrt{1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2} = \frac{m''}{m'}$$

d'après la formule (2) donnée en *b* au chapitre II § B. Faisant $m = 0{,}615$, l'on en tire :

$$\frac{m''}{m'} = 0{,}84$$

Mais cette règle n'est pas tout à fait exacte, car le liquide du coursier est libre à la surface, et n'y éprouve pas de perturbation dans son mouvement, comme cela a lieu dans les tuyaux.

Dubuat considérait la question comme celle d'un orifice noyé dans l'eau d'un réservoir inférieur, censé très-grand par rapport à la section σ de sortie (fig. 10). Par suite, il prenait pour formule :

$$Q = 0{,}85\ \sigma \sqrt{2g\,(H - h)}$$

Le principe des forces vives conduit à une formule plus générale et plus sûre que cette dernière. Représentons par :

σ et S' l'aire des sections de l'orifice et du canal, en un point où le régime est à peu près uniforme.

u et U les vitesses respectives dans ces sections.

$H - h$ la différence du niveau d'eau entre le réservoir d'amont et le canal additionnel.

D'après ce que nous avons trouvé en *b* chapitre II § B, nous pouvons poser :

$$U^2\left[1+\left(\frac{S'}{m\sigma}-1\right)^2\right]=2g\,(H-h)$$

$$U=\sqrt{\frac{2g\,(H-h)}{1+\left(\frac{S'}{m\sigma}-1\right)^2}}$$

Et, par suite :

$$Q=S'\sqrt{\frac{2g\,(H-h)}{1+\left(\frac{S'}{m\sigma}-1\right)^2}}$$

formules auxquelles il n'est pas nécessaire d'appliquer le coefficient de correction, et qui, d'après M. Poncelet, concordent assez bien avec les résultats des expériences qu'il a faites de concert avec M. Lesbros.

L'on aurait de même :

$$u=\frac{S'U}{m\sigma}=\sqrt{\frac{2g\,(H-h)}{\frac{m^2\sigma^2}{S'^2}+\left(1-\frac{m\sigma}{S'}\right)^2}}$$

$$Q=m\sigma u=\ldots\ldots \text{ etc.}$$

Si, dans cette expression de u, l'on suppose σ très-petit par rapport à S', l'on tombe sur le cas de la fig. 10, c'est-à-dire sur celui où l'orifice est noyé dans l'eau d'un bassin inférieur très-étendu ; l'on obtient alors :

$$u=\sqrt{2g\,(H-h)}$$

L'on arriverait encore à ce résultat en posant : $S'=m\sigma$; mais dans ce cas $u=U$. Cette hypothèse est impossible avec l'idée d'un remous qui modifierait la vitesse ; elle ne convient donc, tout au plus, qu'aux écoulements sous de fortes charges et par de grands orifices.

II. *Le niveau du réservoir d'amont étant variable.*

Si un réservoir reçoit moins d'eau qu'il n'en dépense par un orifice ouvert dans une de ses parois, le niveau baisse graduellement et la vitesse U du liquide, à l'orifice, diminue proportionnellement aux

racines carrées des hauteurs de charge; en effet, les vitesses de sortie sont données par la formule :

$$U = \sqrt{\frac{2gH}{1 - \frac{\sigma^2}{S^2}}} = \sqrt{H}\sqrt{\frac{2gS^2}{S^2 - \sigma^2}}$$

et, comme la loi des racines carrées des hauteurs est le caractère distinctif du mouvement uniformément retardé, l'écoulement se fera ici avec ce mouvement, et il jouira des propriétés de ce dernier. Or, d'après les lois du mouvement uniformément retardé, si une masse m, lancée avec une vitesse initiale v, parcourt un espace e en perdant sa vitesse suivant les racines carrées des hauteurs, jusqu'à ce que $v = o$, cette même masse m, lancée avec la même vitesse v, décrirait un espace $2e$, dans le même temps, si elle conservait toujours sa vitesse de départ.

L'on peut en conclure le principe suivant : *Le volume d'eau sorti par un orifice percé dans un réservoir prismatique qui se vide, n'est que la moitié de celui que l'on aurait obtenu si le réservoir avait conservé la charge initiale et que la dépense eût été mesurée pendant un temps égal à celui que le réservoir emploie pour se vider.*

Soit donc H la charge primitive, S la section du réservoir, T le temps qu'il met à se vider. Le volume Q d'eau écoulé pendant cette durée T est SH (fig. 32). Le volume qui se fût écoulé, dans le même temps T, sous la charge H, eût été 2SH d'après le principe précédent, et comme ce même volume, ou la dépense Q' pendant le temps T, est représenté aussi par :

$$Q' = m'L(H - h)\sqrt{2g\left(\frac{H + h}{2}\right)} \times T$$

l'on peut poser :

$$2SH = m'L(H - h)\sqrt{2g\left(\frac{H + h}{2}\right)} \times T$$

d'où :

$$T = \frac{2SH}{m'L(H - h)\sqrt{2g\left(\frac{H + h}{2}\right)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (o)$$

Cette formule (o) convient aux grands pertuis; elle peut s'exprimer

sous une forme plus simple si l'orifice est assez petit par rapport à la section du réservoir; l'on posera alors, avec Toricelli :

$$U = \sqrt{2gH}$$

et, par suite :

$$2SH = m\sigma\sqrt{2gH} \times T$$

$$T = \frac{2SH}{m\sigma\sqrt{2gH}} = 2\,S\,\frac{\sqrt{H}}{m\sigma\sqrt{2g}} = \frac{2}{\sqrt{2g}}.S\,\frac{\sqrt{H}}{m\sigma}$$

$$T = 0{,}45\,\frac{S}{m\sigma}\sqrt{H} \;\ldots\ldots\ldots\; (p)$$

Si l'on représente par T′ le temps que le volume SH eût employé pour s'écouler entièrement, sous la charge H demeurant constante, l'on eût encore obtenu :

$$SH = m\sigma T'\sqrt{2gH}$$

$$T' = \frac{SH}{m\sigma\sqrt{2gH}} = \frac{T}{2}$$

$$T = 2T'$$

c'est-à-dire que le temps qu'un bassin prismatique emploie à se vider est double de celui qui lui serait nécessaire si la charge initiale fût restée la même pendant l'écoulement.

L'on peut encore avoir à résoudre la question suivante : chercher le temps t nécessaire pour que le niveau d'un réservoir descende d'une quantité donnée h.

Il suffit de calculer, d'abord, le temps T qui s'écoulerait depuis l'origine jusqu'à ce que le réservoir soit vidé, et qui est approximativement :

$$T = 0{,}45\,\frac{S}{m\sigma}\sqrt{H}$$

puis, le temps T′ qu'il mettrait à se vider à partir du niveau $H - h = H'$; ce sera :

$$T' = 0{,}45\,\frac{S}{m\sigma}\sqrt{H'}$$

La soustraction T — T′ donnera t :

$$t = 0{,}45\,\frac{S}{m\sigma}\left(\sqrt{H} - \sqrt{H'}\right) \;\ldots\ldots\ldots\; (q)$$

Si les sections S étaient variables d'une façon régulière ou au moins

bien déterminée, il serait facile d'en tenir compte. Il faut aussi employer la formule (o) si les pertuis ont des dimensions assez notables.

De l'équation (q) l'on peut conclure l'abaissement h, en fonction du temps et de H; il suffit d'y chercher H′ pour l'introduire dans $H - H' = h$. L'on en peut tirer aussi le volume d'eau Q″ écoulé en un temps donné t : c'est évidemment Sh, si l'on suppose toujours que les sections S du bassin soient égales.

L'on obtient donc, au moyen de l'équation (q) :

$$\sqrt{H'} = \sqrt{H} - \frac{m\sigma t}{0{,}45\,S}$$

$$H' = H - 2\frac{m\sigma t}{0{,}45\,S}\sqrt{H} + \left(\frac{m\sigma t}{0{,}45\,S}\right)^2$$

D'où :

$$H - H' \text{ ou } h = 2\frac{m\sigma t}{0{,}45\,S}\sqrt{H} - \frac{(m\sigma t)(m\sigma t)}{(0{,}45\,S)(0{,}45\,S)}$$

$$h = \frac{2\,m\sigma t}{0{,}45\,S}\left(\sqrt{H} - \frac{m\sigma t}{0{,}90\,S}\right)$$

$$Q' = Sh = \frac{2\,m\sigma t}{0{,}45}\left(\sqrt{H} - \frac{m\sigma t}{0{,}90\,S}\right)$$

Toutes les considérations précédentes seraient applicables encore si une vanne formait déversoir par sa traverse supérieure; seulement, au lieu de la formule $Q = m\sigma\,T\sqrt{2gH}$, il faudrait employer ici celle qui correspond aux déversoirs, c'est-à-dire : $Q = m'LHT\sqrt{2gH}$; et la limite d'abaissement se trouverait au seuil; alors $h = H$.

III. *Le réservoir d'amont étant alimenté pendant qu'il se vide.*

Désignant par q le volume d'eau fourni au bassin, en une seconde, par le ruisseau qui l'alimente, et par h la grandeur de l'abaissement dans le temps t, dh sera la quantité dont le liquide baissera pendant l'instant infiniment petit dt, qui suit t. Le volume d'eau sorti en une seconde sera ici $Sdh + qdt$, et l'on aura l'identité :

$$Sdh + qdt = m\sigma dt\sqrt{2g(H - h)}$$

Soit $H - h = H'$; alors $- dh = dH'$

$$qdt - SdH' = m\sigma dt \sqrt{2g} \sqrt{H'}$$

$$dt = \frac{- SdH'}{m\sigma \sqrt{2g} \sqrt{H'} - q}$$

Pour faciliter l'intégration, posons : $m\sigma \sqrt{2g} \sqrt{H'} - q = \varphi$

$$dt = \frac{- S}{m^2\sigma^2 g} \left(d\varphi + q \frac{d\varphi}{\varphi}\right)$$

dont l'intégrale est :

$$t = - \frac{S}{m^2\sigma^2 g} (\varphi + q \text{ log. hyp. } \varphi) + C$$

Remplaçant φ par sa valeur, et déterminant la constante C pour l'origine du mouvement où $t = o$, $h = o$ et $H' = H$, l'on obtient l'équation :

$$t = \frac{2\,S}{(m\sigma \sqrt{2g})^2} \left[m\sigma \sqrt{2g} (\sqrt{H} - \sqrt{H'}) + q \text{ log. hyp. } \frac{m\sigma \sqrt{2gH} - q}{m\sigma \sqrt{2gH'} - q}\right]$$

Ou bien, en passant des logarithmes hyperboliques aux logarithmes ordinaires :

$$t = \frac{2\,S}{(m\sigma \sqrt{2g})^2} \left[m\sigma \sqrt{2g} (\sqrt{H} - \sqrt{H'}) + 2{,}303\, q \log. \frac{m\sigma \sqrt{2gH} - q}{m\sigma \sqrt{2gH'} - q}\right] \ldots\ldots (r)$$

Si l'on y fait $q = o$ l'on retombe sur l'équation (q) trouvée plus haut.

Pour déterminer la valeur de l'abaissement h en un temps donné t, l'on cherchera quelle serait la charge H' à la fin de ce temps : à cet effet l'on essaiera successivement diverses valeurs de H' dans l'équation (r) jusqu'à ce qu'elle soit satisfaite. Ayant H', l'on déduira $h = H - H'$.

b. Vannes inclinées. — Système Chaubart.

Il arrive parfois que certains cours d'eau sont exposés à des crues subites, capables de produire des dégâts considérables si l'on n'avait soin d'ouvrir à temps les retenues. Afin de prévenir la négligence d'un éclusier, l'on emploie alors des retenues mobiles dont l'ouverture augmente avec la pression de l'eau. Telles sont les vannes horizontales (fig. 36), qui tournent autour d'un axe O, placé à une hauteur

convenable pour que la pression de l'eau, dès que celle-ci atteint une certaine hauteur, agisse sur le panneau supérieur de la vanne et le fasse basculer en avant pour l'amener dans la position horizontale. Dans ce but, l'on échancre les bajoyers suivant la courbe que la vanne doit décrire en s'abattant; l'on donne aussi un surcroît de pesanteur à son panneau inférieur, afin qu'elle tende à se redresser dès que le liquide est suffisamment écoulé. Il suffit de rendre dormante une partie de la cloison pour être en même temps assuré de conserver en amont des vannes une profondeur d'eau suffisante.

Supposons qu'une vanne mobile autorégulatrice ait basculé de façon à prendre la position AC, s'appuyant donc par son panneau supérieur sur des rainures inclinées AO, pratiquées dans les bajoyers; l'inclinaison de AO étant déterminée d'après les crues et par la condition de conserver toujours une certaine hauteur d'eau en amont de la retenue. Si l'on admet que le mouvement soit permanent, l'on pourra calculer la dépense, du moins à l'origine, par les formules :

$$Q = 1{,}80\ LH\sqrt{H}$$

qui concerne le cube écoulé par-dessus la vanne, H étant la distance entre l'arête supérieure A et le niveau du bassin; et

$$Q' = 0{,}615\ LH'\sqrt{2gH''} = 2{,}75\ LH'\sqrt{H''}$$

s'appliquant à la dépense inférieure; H' étant la distance verticale entre l'arête C et le sommet D du heurtoir, H'' la distance du niveau du bassin au centre de gravité de la section inférieure d'écoulement.

M. *Chaubart*, par l'invention de ses vannes à bascule, semble avoir résolu d'une façon complète les deux problèmes principaux relatifs au régime des canaux de navigation, d'irrigation, etc., et au règlement des niveaux dans les biefs d'usines.

Premier système. Le premier problème à résoudre était de construire une vanne mobile, mise en mouvement par la pression de l'eau du bief d'amont, et assurant l'écoulement du superflu provenant de ce bief, de façon néanmoins qu'il conserve un niveau constant. Voici brièvement la disposition du système Chaubart, tel qu'il fut appliqué à l'origine (1854); depuis, il a subi quelques corrections de détail.

La vanne AB (fig. 37), occupant toute la largeur du canal, est inclinée sur la verticale d'un angle de 10° vers l'aval et porte, au tiers

de sa hauteur, deux courbes en fonte CGD invariablement liées avec elle ; ces courbes sont assujetties à rouler sur une règle en fer EF, horizontale, ou à peu près telle, car son inclinaison peut être réglée par une vis *e*, la règle étant mobile autour du boulon *f*. Une chaîne à la Vaucanson reliée par des boulons, d'une part au coussinet fixe *h*, de l'autre à l'extrémité de la courbe, rattache la vanne à la traverse longitudinale fixe *c*, et force la courbe à rouler sur la règle EF.

Dans la position initiale AB de la vanne, lorsque l'eau affleure son sommet, le système doit être réglé de façon que la résultante des actions exercées sur l'appareil par la pesanteur et par les pressions de l'eau vienne passer en G, point actuel de contact de CD avec EF, et origine de la courbe de rotation. Dans la première vanne Chaubart, ce point G correspond au centre de pression du liquide ; nous avons vu, en effet, que : pour un parallélogramme ou un rectangle, dont le côté supérieur est à fleur d'eau, le centre de pression se trouve aux $\frac{2}{3}$ de la base supérieure et sur la ligne des milieux des bases horizontales.

Lorsque l'alimentation augmente, l'équilibre cesse d'exister ; le centre de pression se relève avec le niveau du bief; le mouvement de bascule se produit, et la résultante des pressions vient passer en avant de G, en G′, par exemple, c'est-à-dire par le nouveau point de contact. Alors l'eau s'échappe à la fois par-dessus et par-dessous la vanne, qui s'incline plus ou moins suivant la quantité d'eau affluente à débiter.

Des taquets empêchent la vanne de descendre en dessous d'un angle de 10° avec l'horizon.

Restait à déterminer la forme et la position de la courbe CD pour que, dans toutes les positions du système, la résultante des forces qui agissent sur la vanne passe toujours par le point de contact, la pression de l'eau étant calculée d'après l'hypothèse d'un niveau XA invariable. M. Chaubart a résolu la question par des tâtonnements qui l'ont conduit à adopter, pour CD, un arc de cercle dont il détermine le rayon au moyen d'une formule empirique ; la règle EF doit alors être horizontale.

Ce résultat peut être obtenu théoriquement ; nous développerons

d'une façon complète la description et les calculs relatifs aux vannes Chaubart, lorsque nous traiterons des *constructions hydrauliques* dans la *Deuxième Partie* de notre ouvrage.

Second système. L'appareil précédent a pour but d'obtenir dans un bief un niveau constant malgré une alimentation variable; dans le second système, M. Chaubart a résolu le problème inverse, consistant à débiter un volume d'eau constant par un pertuis rectangulaire ouvert dans un bief dont le niveau varie.

A l'origine la vanne AB (fig. 38) est verticale; le niveau XA, qui est alors à son maximum de hauteur, vient affleurer à peu près l'arête supérieure A. L'orifice B*n* est déterminé convenablement pour qu'il se débite, dans l'unité de temps, un volume d'eau constant et déterminé Q. La vanne s'appuie encore ici contre une courbe CC'C'', et puisqu'elle est en équilibre dans la position AB, cette courbe doit être telle, que la résultante des forces passe par le point C. Lorsque le niveau descend en X'A', la vanne bascule en A'B', et le point B' se relevant, l'orifice d'écoulement augmente. Dès lors, si la courbe est convenablement tracée, il peut se faire que cette augmentation dans la hauteur de la section d'écoulement compense précisément la perte résultant de l'abaissement du niveau, et que la dépense Q reste la même dans les deux positions. Cette dépense est d'ailleurs représentée par la formule :

$$Q = m\sigma\sqrt{2gH} = mLh\sqrt{2g\left(H - \frac{1}{2}h\right)} = \text{constante}$$

où L = la largeur du pertuis; h la hauteur variable B'n' et H la distance, variable aussi, entre le niveau et le fond du canal. De cette équation l'on déduit les valeurs de H correspondantes à celles de h et réciproquement. Le niveau étant en X'A' et le point B étant venu en B', de façon que l'équation précédente soit satisfaite, l'on peut énoncer comme suit le problème : Quelle doit être la courbe CC'C'' pour que la résultante des pressions de l'eau et du poids de la vanne passe au point de contact de la nouvelle position A'B' avec cette courbe.

Si l'on cherche à résoudre théoriquement la question, l'on arrive à une équation différentielle indéterminée, à trois inconnues, qu'il est fort difficile de simplifier. Aussi l'on se borne à un procédé graphique

approximatif, dans lequel on trace la courbe par interpolation.

Nous avons vu que la dépense constante Q = C serait représentée ici par la formule :

$$Q = mLh\sqrt{2g\left(H - \frac{h}{2}\right)}$$

dans laquelle l'on serait disposé à donner au coefficient m une des valeurs comprises dans le tableau C', attendu que, d'après l'hypothèse admise jusqu'ici, les vannes mobiles seraient établies à partir du fond de la conduite ou du coursier Mais, suivant un Mémoire de M. Poncelet (1), l'inclinaison de la vanne A'B' (fig. 38) vers l'aval peut augmenter sensiblement la valeur du coefficient de correction. Ainsi, d'après les expériences de ce savant sur la dépense d'un coursier raccordé, par des courbes analogues à celles de la fig. 34, avec le bassin d'alimentation, de façon que la contraction fût détruite, il résulte que le coefficient atteint les valeurs suivantes :

1°	La vanne mince étant verticale (fig. 35) . . .		0,70
2°	Idem	inclinée à 1 de base sur 2 de hauteur	0,74
3°	Idem	à 45°	0,80

Les vannes autorégulatrices sont employées généralement dans les dérivations d'écluses de canaux navigables ; dès lors les circonstances de l'écoulement ne sont plus les mêmes que dans l'hypothèse précédente.

La différence des niveaux X'A' et X''A'' (fig. 39) de deux biefs consécutifs est toujours assez forte, et la hauteur totale mY' d'amont est trop considérable pour employer le système de la fig. 36. L'on divise alors cette hauteur en deux parties ; la plus grande mn est dormante ; la partie supérieure nA est destinée à la vanne mobile ; celle-ci est déterminée de hauteur et de longueur suivant le régime du canal et les conditions de niveaux que l'on veut obtenir.

L'on voit ici que les lois de l'écoulement sont simples ; ainsi, pour le deuxième système Chaubart, le coefficient m est donné par la table B de M. Lesbros, sauf à le majorer légèrement d'après les conclusions de M. Poncelet.

(1) *Mémoire sur les roues hydrauliques à aubes courbes*. Metz, 1827.

c. Bateau-vanne.

L'invention du *bateau-vanne* est due à M. *Sartoris;* son but est de maintenir un niveau XA constant, ou à peu près tel, malgré une alimentation variable par le bassin d'amont.

La section transversale du bateau est rectangulaire (fig. 40); il s'appuie contre deux piles en maçonnerie dont l'intervalle est fermé par un déversoir; le radier nC de celui-ci se trouve à une certaine hauteur nB du fond.

Désignons par H la différence de hauteur mm' entre le point m et le niveau AX; par p et U la pression (atmosphérique) et la vitesse en ce point m; par p' et U' la pression qu'éprouve le liquide en Dm ainsi que sa vitesse sous le bateau. Posons aussi :

$$mn = a \text{ et } mn\text{B} = \text{A}$$

La pression p' est évidemment la force qui fait équilibre au poids du bateau, convenablement calculé d'après le principe d'Archimède et augmenté du frottement contre les piles ainsi que de la pression p.

Il est facile de concevoir qu'en descendant convenablement le bateau, par du lest ou autrement, il viendra occuper une position d'équilibre telle que, pour un niveau connu AX il se débite par mn un volume d'eau déterminé; l'on comprend aussi qu'il soit possible de régler l'écoulement de façon qu'il s'échappe toujours par mn une masse liquide qui irait en croissant par quantités égales aux accroissements successifs dus à des surélévations de niveau AX. Le bateau, équilibré pour la hauteur $mm' = \text{H}$, s'élèverait de lui-même à mesure que AX monterait, puisqu'il ne saurait plus faire équilibre à p', cette dernière force croissant avec H.

L'on se trouve ici dans le cas d'un orifice mn plus ou moins évasé intérieurement, et prolongé par un canal nC de même section. L'on posera donc :

$$\text{H} = \frac{\text{U}^2}{2gm^2} \text{ ou simplement } = \frac{\text{U}^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Admettant approximativement que tous les filets sont parallèles et d'égale vitesse dans une même section DD', ou D''D''', etc., l'on aura aussi, pour un bassin rectangulaire :

$$a\text{U} = \text{AU}' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Enfin, le théorème de Bernouilli donnera pour 3e équation de condition :

$$\frac{p' - p}{\Delta} = \frac{U^2 - U'^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

L'on déduira des trois précédentes :

$$\frac{p' - p}{\Delta} = H\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right)$$

Quoique les hypothèses admises dans ce calcul ne soient pas rigoureuses, il est permis d'en conclure que p' doit être supérieur à p, et que l'excès $p' - p$ va en croissant avec H. Il suffit d'introduire dans le bateau plus ou moins d'eau, destinée à le lester, pour obtenir son équilibre dans la position qu'il doit occuper ; la force verticale produite par l'excès $p' - p = \Delta h\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right)$ est alors équilibrée par le poids du bateau et son frottement contre les piles.

C. DES ÉCLUSES.

En traitant la question des vannes, nous avons supposé que l'écoulement se faisait librement dans l'air ; nous avons aussi admis que les coefficients des tables de M. Lesbros leur fussent applicables, quel que puisse être l'orifice.

Pour les écluses, les circonstances sont différentes : l'écoulement se fait généralement, d'un bief dans l'autre, au moyen de pertuis ouverts dans la partie inférieure des portes de retenue ; par suite, le problème consiste à rechercher les lois du mouvement d'un fluide qui passe d'un réservoir dans un autre, l'orifice de sortie étant complétement noyé.

Quant au coefficient de correction m, nous verrons qu'il peut être donné par les tables de M. Lesbros, quelque grand que soit l'orifice, et qu'il soit noyé ou découvert.

a. Écoulement d'un réservoir dans un autre, le niveau demeurant constant pour chacun d'eux.

Si l'on représente par U la vitesse des filets liquides pendant qu'ils traversent l'ouverture mn, et par U′ celle que ces filets conservent dans

une section MN située hors du rayon d'action de la veine, la perte de charge subie par le liquide au delà de la section *mn* doit être représentée par :

$$\frac{U^2 - U'^2}{2g}$$

Supposons le cas particulier où la masse liquide, dans les deux biefs, soit assez considérable pour qu'on puisse la regarder comme à peu près stagnante; le niveau A'X' est alors horizontal, c'est-à-dire que le niveau piézométrique devient le même en *mn* et en MN, et la perte de charge de *mn* en MN est représentée par :

$$\frac{U^2}{2g}$$

Mais il est essentiel de remarquer que cette valeur serait inexacte : 1° si la vitesse U n'était pas excessivement faible ; 2° si le niveau piézométrique variait de *mn* en MN, ce qui pourrait arriver pour de petites valeurs de *m*A'.

Cela admis, si une molécule *a* venue en *b* possède une vitesse presque nulle dans ces deux positions extrêmes, il faut, d'après le théorème de Bernouilli, que la perte de charge éprouvée dans le trajet de *a* en *b* soit égale à la charge, c'est-à-dire à la différence de niveau des colonnes piézométriques élevées aux points *a* et *b*. Or, la charge est due à la hauteur $AA' = OA - OA' = H - H' = h$, et à la différence $p - p'$ des pressions en A et A' ; la perte de charge peut donc s'exprimer aussi par :

$$h + \frac{p - p}{\Delta}$$

Égalant les deux valeurs de la perte, l'on obtient :

$$\frac{U^2}{2g} = h + \frac{p - p'}{\Delta}$$

$$U = \sqrt{2g\left(h + \frac{p - p'}{2}\right)}$$

Ou bien, si $p = p'$:

$$U = \sqrt{2g\,(H - H')} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

qui est la formule du § *a*, chapitre II, et que l'on peut exprimer comme suit : Lorsqu'un fluide passe d'un réservoir dans un autre, par un orifice noyé, *la charge effective* sur cet orifice, ou la hauteur due à la

vitesse de sortie, en un instant quelconque, *est la différence de niveau des deux réservoirs,* à ce même instant

La vitesse étant ainsi déterminée, la dépense Q sera donnée par l'expression :

$$Q = m\sigma \sqrt{2g(H - H')}$$

Cependant l'on pourrait se demander si le coefficient de correction m a la même valeur ici que dans le cas où l'écoulement aurait lieu librement dans l'atmosphère; c'est-à-dire, si la veine fluide se contracte également dans l'air ou dans l'eau. Or, il résulte de plusieurs expériences faites sur des pertuis d'écluse que la dépense est à peu près égale dans les deux cas. Le fait a été démontré aussi jadis par Daniel Bernouilli, au moyen d'un vase cylindrique, percé d'un orifice à la partie inférieure et rempli d'eau; Bernouilli remarqua qu'il se vidait dans un même temps, soit que l'orifice fût en plein air, soit qu'il plongeât légèrement dans l'eau dormante (1).

Lorsque l'orifice ne se trouve qu'imparfaitement noyé, le niveau A'X' n'est plus sensiblement horizontal, et la formule (4) devient incertaine, quant à l'approximation. Il faut alors diviser l'orifice en deux parties, et considérer l'une σ', comme débouchant dans l'air, l'autre σ'', comme couverte par l'eau du bief inférieur. Mesurant respectivement, sur les centres, les hauteurs H'' et H''' (fig. 42) sous le niveau XA, l'on obtiendra la dépense par la relation suivante :

$$Q = m\left[\sigma' \sqrt{2gH''} + \sigma'' \sqrt{2g(H''' - H')}\right]$$

$$Q = m\sqrt{2g}\left[\sigma' \sqrt{H''} + \sigma'' \sqrt{H''' - H'}\right]$$

b. **Le niveau étant constant dans le réservoir supérieur et variable dans l'autre.**

Pour réaliser ces circonstances nous supposerons que le réservoir inférieur ait des dimensions limitées, et que le bassin d'amont soit indéfini, autrement dit, qu'il demeure à un niveau constant. Tel serait le cas par exemple pour un sas d'écluse que l'on remplit au moyen de l'eau du bief supérieur. La question à traiter consiste dans la recherche du temps nécessaire pour que le niveau du sas atteigne une hau-

(1) D. Bernouilli, *Hydrodynamique.*

teur donnée ; c'est le problème inverse de celui que nous avons développé au § B de ce chapitre.

Soit donc A'X' (fig. 41) le niveau primitif, et $A'A'' = h = H' - H''$.

A mesure que le niveau A'X' s'élève, la hauteur AA' diminue, et comme AA' représente le $H - H'$ de la formule (4), c'est-à-dire, exprime la hauteur due à la vitesse en *mn*, variable à tout instant depuis $H' = H'$ jusqu'à $H' = H''$, il s'ensuit que la surface fluide A'X' est poussée de bas en haut par une force décroissante suivant les racines carrées des hauteurs AA', et que, dans ce cas-ci, comme dans celui du § B, nous trouvons encore le caractère du mouvement uniformément retardé. La valeur du temps t, nécessaire pour faire monter en A''X'' le niveau primitif A'X', sera donnée par la formule :

$$t = \frac{2S}{m\sigma\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H'} - \sqrt{H''}\right)$$

et pour le temps du remplissage entier, jusqu'en AX :

$$T = \frac{2S}{m\sigma\sqrt{2g}}\sqrt{H'}$$

Des expériences faites par *Kypke*, sur une écluse du canal de Bromberg, en Allemagne, et rapportées par Eytelwein (1), ont produit des résultats qui concordent assez bien avec ceux que l'on obtiendrait par les formules précédentes, en y donnant à m la valeur 0,615. D'Aubuisson, dans son traité d'hydraulique, prend, pour coefficient constant des dépenses par les pertuis, la quantité 0,625 ; aussi, en appliquant le calcul aux expériences du canal de Bromberg, arrive-t-il généralement à des valeurs de t supérieures à celles qui ont été mesurées.

c. Le niveau des deux réservoirs étant variable.

Soient deux bassins M et N (fig. 10) dont les niveaux AX et A'X' se trouvent à des hauteurs H et h respectives, au-dessus du sommet de l'orifice k par lequel s'opère l'écoulement du liquide vers le réservoir N. Supposons les deux bassins limités, de façon que le niveau AX baisse pendant que A'X' s'élève ; il s'agit de trouver l'équation qui dé-

(1) Eytelwein, *Handbuch*, § 120.

termine le rapport entre les deux élévations, en fonction du temps t et des sections S en M, et S′ en N ; ou qui donne réciproquement le temps t qu'a duré l'écoulement en fonction de ce rapport et de S et S′.

Prenons deux tranches élémentaires mn et $m'n'$, d'épaisseur respective dx et dy ; d'où $nA = x$ et $m'B = y$. Lorsque le liquide sera descendu de dx en M, pendant l'instant dt, il se sera élevé dans le même temps, en N, de dy, et ces deux quantités dx et dy seront liées par l'expression :

$$Sdx = S'dy \text{ ou plutôt } = -S'dy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Mais la dépense par l'orifice k s'exprime aussi par la formule :

$$Qdt = m\sigma\sqrt{2g(x-y)}.\,dt$$

D'où :

$$Sdx = -m\sigma\sqrt{2g(x-y)}.\,dt$$

$$dt = -\frac{Sdx}{m\sigma\sqrt{2g}\sqrt{x-y}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

L'intégration de l'équation (5) donne :

$$Sx + S'y = C \text{ ou constante}$$

et, comme $y = h$ pour $x = H$, il résulte :

$$Sx + S'y = SH + S'h$$

$$y = \frac{SH + S'h - Sx}{S'}$$

Remplaçant y par cette valeur dans l'équation (6), et intégrant ensuite, en observant que $x = H$ pour $t = o$, l'on obtient définitivement :

$$t = \frac{2S\sqrt{S'}}{m\sigma\sqrt{2g}\,(S+S')}\left[\sqrt{S'(H-h)} - \sqrt{(S+S')x - SH - S'h}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Si l'on veut connaître le temps nécessaire au liquide pour que les deux niveaux AX et A′X′ arrivent dans un même plan, il suffira de faire $x = y = \frac{SH + S'h}{S + S'}$; remplaçant x par cette valeur dans l'équation (7), l'on en conclut :

$$t = \frac{2SS'\sqrt{H-h}}{m\sigma\sqrt{2g}\,(S+S')} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Cette dernière formule peut s'appliquer au cas suivant, qui se présente fréquemment dans une écluse à deux sas contigus, ou bien en-

core dans une double écluse dont les deux sas sont séparés par un bassin d'attente intermédiaire. Lorsqu'un bateau qui remonte le canal est entré dans le sas inférieur, l'on ferme la porte d'aval qui vient de lui en ouvrir l'entrée. Ensuite, la porte d'amont du sas supérieur étant bien fermée, l'on manœuvre les vannes de sa porte d'aval, c'est-à-dire de celle qui sépare les deux sas; l'eau s'écoule de l'un dans l'autre jusqu'à ce que le niveau soit commun. Dès lors l'on ouvre la séparation et le bateau peut passer dans le sas supérieur. La question à résoudre serait donc celle-ci : Chercher le temps qui s'écoulera depuis le moment de la levée des vannes jusqu'à celui où le niveau se trouve le même dans les deux sas.

D'Aubuisson rapporte une expérience de ce genre qu'il a faite dans le canal du Midi, sur la double écluse de Bayard, dont les portes avaient deux pertuis. D'après ses conclusions, l'expérience aurait donné 2'29", tandis que la formule (8) ne produisait que 2'17". L'auteur attribue cette différence à ce que les vannes n'étaient pas encore entièrement levées, lorsque l'eau du sas inférieur atteignait déjà leur centre d'ouverture, tandis qu'il avait supposé cette condition dans sa formule, en comptant le temps t à partir du moment où le niveau inférieur serait à cette hauteur.

Il nous semble qu'il existe deux autres causes d'erreur dans le calcul de D'Aubuisson : la première, c'est qu'il a employé une formule applicable à un orifice noyé, ce qui ne se présentait pas avec les conditions choisies ; la seconde, c'est que, se règlant d'après les expériences (1) faites par l'ingénieur Pin sur les écluses du canal du Midi, il a pris pour m la valeur :

$$m = 0,548$$

qui est la moyenne obtenue par Pin, lorsque deux pertuis sont ouverts *à la fois* dans une porte de retenue. Nous avons déjà fait mention de cette anomalie qui, du reste, ne s'est nullement confirmée dans la série d'observations faites avec le plus grand soin par Castel et D'Aubuisson lui-même.

Quant à la véritable valeur à donner au coefficient de correction m, l'on admet, depuis les expériences de *Lespinasse* (1782), de *Pin*

(1) *Histoire du canal du Midi ou de Languedoc*, par le général Andréossy, t. I.

(1792), de *Kypke*, de *Lapeyre*, que sa valeur moyenne est $m = 0,625$, et que, par conséquent, la formule générale, pour les grands orifices ou les pertuis d'écluses, est la suivante :

$$Q = 0,625\, \sigma \sqrt{2gH}$$

ou bien :

$$Q = 0,625\, \sigma \sqrt{2g\,(H - H')}$$

Remarquons d'abord que, dans la plupart des expériences précitées, la charpente qui formait l'encadrement des pertuis avait des épaisseurs trop notables pour pouvoir admettre l'hypothèse de la mince paroi. C'est déjà là un motif de variations, suivant les épaisseurs et les détails de construction ; les observations mêmes de Lespinasse le prouvent. En effet, lorsque la vanne n'a été levée que d'une petite quantité, la contraction a cessé sur les quatre côtés ; pour une ouverture de 0^m46 de hauteur le coefficient a été 0,641, tandis que la même vanne a donné 0,803, lorsque la levée n'a atteint que 0^m12.

Les expériences sur les écluses ont été faites généralement sans méthode et sans juste appréciation des circonstances accidentelles ; leurs conséquences ne peuvent être admises sérieusement, et c'est à tort que M. *Steichen* déclare (1) que l'on peut accepter avec confiance le coefficient moyen $m = 0,625$ pour l'appliquer aux pertuis des portes d'écluses, sous le prétexte qu'ils sont ordinairement très-rapprochés des radiers.

En réalité, il faut conclure des observations si précises de MM. Poncelet et Lesbros, que, lorsque la contraction est supprimée sur le côté inférieur, le coefficient varie (table C) :

1° Avec le rapport $\frac{L}{h}$ de la largeur à la hauteur de l'orifice ; il augmente avec ce rapport à partir du carré.

2° Qu'il diminue avec la charge, lorsque $\frac{L}{h}$ est assez considérable, et qu'il atteint son maximum pour des charges de 0,50 à 0,60, lorsque $\frac{L}{h}$ est inférieur à 20.

Il y a donc loin de là à une valeur constante. Comme les circon-

(1) Steichen, *Précis de mécanique appliquée.*

stances peuvent varier sous plusieurs points de vue, le moyen le plus sûr de se rapprocher de la réalité, c'est de bien examiner, d'après ce que nous avons exposé jusqu'ici, quel est le genre de cas qui se présente, et de choisir ensuite avec lucidité la table de Lesbros qui s'applique aux circonstances de la question; l'on y trouvera la valeur à donner au coefficient m, en ayant soin de s'assurer que la charge et le rapport $\frac{L}{h}$ sont les mêmes dans la table et dans le problème qu'il s'agit de résoudre.

D. DES BARRAGES A POUTRELLES.

a. Poutrelles horizontales.

Toutes les questions qui se rattachent à ce genre de barrage sont implicitement comprises dans le § A de ce chapitre. La formule générale de la dépense sera donc encore :

$$Q = m\,LH\sqrt{2gH} = 0{,}405\,LH\sqrt{2gH}$$

Ou bien :

$$Q = 1{,}80\,LH\sqrt{H}$$

b. Poutrelles verticales ou aiguilles.

Le barrage précédent étant inapplicable à l'éclusement des ponts à larges ouvertures, il a été employé fréquemment, dans ces derniers temps, un système de fermeture au moyen d'aiguilles ou poutrelles verticales. Tels sont les barrages établis sur l'Yonne, la Seine, l'Oise, la Moselle, etc., et qui consistent généralement en une suite d'aiguilles jointives, en sapin, de 0,11 à 0,12 d'épaisseur, appuyées par le bas contre un ressaut ou heurtoir ménagé dans le radier, et par le haut contre une charpente en poutres solidaires; celle-ci est établie un peu au-dessus du niveau de la retenue et forme en même temps pont de service (fig. 43). Parfois, le coffrage supérieur ABCD est fixe; l'écoulement y est alors intercepté par un remplissage en terre M, qui présente certains avantages, sur lesquels nous reviendrons dans la *deuxième partie* du *Traité*.

Dans ce nouveau système le barrage se fait par aiguilles ou par

panneaux; ces derniers se composent de plusieurs poutrelles réunies par quelques pointes à des liteaux en sapin, d'environ 0,10 de largeur sur 0,027 d'épaisseur. Comme il est possible de débarrer partiellement le pertuis, la seule question à examiner ici est celle qui consiste à trouver la dépense par une rainure verticale d'une largeur variable, ou par une série de rainures analogues, plus ou moins accolées. Nous admettrons d'abord l'hypothèse d'un coffrage supérieur fixe.

Différents cas peuvent se présenter; par exemple :

1° *Le niveau d'amont n'étant pas supérieur à l'arête C du coffrage fixe* (fig. 43).

Si le niveau du bief inférieur ne dépasse pas YC'FG, le liquide sortira de l'ouverture CG en décrivant un segment parabolique CC'FG dont l'épaisseur sera la largeur L de l'ouverture ménagée dans le barrage.

Or, d'après une propriété de la parabole, ce segment est les deux tiers du rectangle CD'C'G, il est donc égal à $\frac{2}{3} \times \overline{CG} \times GC'$ ou à $\frac{2}{3} H \sqrt{2gH}$; et la dépense résultante sera :

$$Q = \frac{2}{3} mLH \sqrt{2gH}$$

qui devient, pour $m = 0{,}615$:

$$Q = 0{,}405\ LH \sqrt{2gH}$$

C'est-à-dire, la formule des *déversoirs*.

L'on serait arrivé au même résultat en procédant, comme pour la question de la fig. 32, par tranches infiniment minces depuis G jusqu'en C; de là l'expression :

$$Q = \frac{2}{3} mL \left[H \sqrt{2gH} - h \sqrt{2gh} \right] \text{.....} (k)$$

dans laquelle $h = o$ si le niveau est en C.

Dans le cas où le niveau serait inférieur à CX, par exemple en mn, il faudrait, dans la formule (k) remplacer H par CG et h par Cm.

Pour un niveau en aval supérieur à YC'FG, l'ouverture CG devrait être divisée en deux parties dont l'une suivrait la loi des déversoirs, et dont l'autre serait noyée.

2° *Le niveau d'amont étant supérieur à l'arête inférieure du coffrage fixe.*

L'on retombe ici dans la question, développée au chapitre II, des orifices en mince paroi pour lesquels la contraction est plus ou moins nulle sur le côté inférieur.

3° *Le coffrage étant mobile.*

Il faut alors tenir compte de la dépense supplémentaire qui se fait à travers le coffrage. L'on voit, d'après ce qui est indiqué à la fig. 43, que ce volume proviendra de la différence entre deux segments paraboliques faciles à calculer.

CHAPITRE QUATRIÈME.

ÉCOULEMENT PERMANENT DE L'EAU DANS LES TUYAUX DE CONDUITE ET DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS.

A. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

a. Des espèces de mouvement.

Dans l'écoulement d'un liquide pesant et homogène, soit par un tuyau de conduite, soit dans un canal découvert, le mouvement est *permanent* ou non; il peut être *permanent et uniforme,* ou bien *permanent* et *varié.* Nous en examinerons les phénomènes et les lois dans ces deux dernières circonstances.

Le mouvement est *permanent* lorsque la vitesse et la pression, en un même point du courant, sont *constantes* relativement au temps; il est *varié,* quand la vitesse et la pression varient, à un instant donné, tant d'une molécule liquide à une autre, que d'un point à l'autre de la trajectoire d'une même molécule. Dans le mouvement *uniforme,* au contraire, chaque molécule possède une vitesse constante, et toutes les sections normales aux trajectoires présentent des phénomènes identiques.

b. Propriétés de la viscosité.

La gravité est la seule force qui produise le mouvement dans les cours d'eau naturels comme dans les canaux et les tuyaux d'écoulement inclinés. Lorsque cette force agit sur une masse liquide abandonnée à elle-même dans un réservoir ou dans un vase solide, son action sur chaque molécule est détruite, il y a égalité de pression en

tout sens; le fluide est en équilibre, en repos, et sa surface supérieure est horizontale, quelle que soit la forme et l'inclinaison du fond du vase qui le contient. Réciproquement si la surface liquide est horizontale, il ne saurait se produire de mouvement, malgré la pente que pourrait avoir le lit. Il n'en est plus ainsi quand la surface liquide est inclinée ; alors même que le fond du lit est horizontal ou en contrepente (sur une petite étendue), l'égalité de pression en tous sens n'existe plus ; une molécule quelconque de la surface se trouve dans le même cas qu'un solide glissant sur un plan incliné ; la pesanteur, c'est-à-dire la force accélératrice due à la gravité, agit sur cette molécule, comme sur ce solide avec une intensité proportionnelle à son poids gdM et au sinus de l'angle d'inclinaison i. Cette action s'exerce avec la même intensité sur toutes les molécules placées verticalement en dessous de celle que nous avons considérée; et, si l'on suppose que i est constant, elle agit de la même façon, avec la même force, sur une molécule quelconque de la masse en mouvement. De là ce principe que : le *mouvement* des molécules d'un cours d'eau ne doit son origine qu'à la *pente de sa surface*.

La pesanteur, qui engendre le mouvement, étant une force accélératrice constante, si aucune autre force n'agissait en sens contraire, le liquide descendrait d'un mouvement uniformément accéléré et sa vitesse n'atteindrait jamais l'uniformité. Or, l'existence de cette force retardatrice nous est révélée par un phénomène que nous avons sous les yeux constamment : la vitesse des cours d'eau naturels, des ruisseaux et rivières, quelle que soit leur pente, est sensiblement uniforme, et n'est, par conséquent, jamais en rapport avec la hauteur de chute théorique $h = \frac{v^2}{2g}$, depuis la source jusqu'au point considéré. Il faut donc que, dans l'écoulement, se développe une force retardatrice, *qui croisse avec la vitesse*, ou plutôt avec une fonction de la vitesse, de façon à faire équilibre à la force accélératrice de la pesanteur, à lui être égale. *Bossut* (1) ayant fait couler de l'eau dans un canal en bois, de 200 mètres de longueur, avec une pente de 1/10, et ayant marqué, sur ce conduit, des longueurs de 33 mètres, trouva que,

(1) Bossut, *Hydrodynamique*, § 797.

chacune d'elles, la première exceptée, était parcourue dans un même nombre de secondes.

Quand le liquide s'écoule par un tuyau incliné, les phénomènes précédents se représentent de la même manière; il suffit, pour le constater, d'adapter à un orifice, percé dans un réservoir, un tuyau, de diamètre constant mais de longueur variable, dont l'extrémité libre déboucherait dans l'atmosphère toujours au même niveau. Si le niveau du réservoir est en outre maintenu à une hauteur et à une pression constantes, et si la pression atmosphérique ne change pas non plus, l'on voit alors la dépense diminuer en même temps que la longueur du tuyau va en augmentant. Il faut en conclure que la viscosité produit une force retardatrice, et que celle-ci est une fonction croissante de la longueur L du tuyau; elle est donc de même nature que celle qui s'oppose à l'accélération du mouvement des canaux; seulement, dans ce dernier cas, elle produit l'uniformité, parce qu'il y a équilibre entre deux forces de même espèce, accélératrices toutes deux, l'une positive et l'autre négative; dans le second cas, elle diminue la dépense d'une manière croissante, parce que, d'un côté se trouve une force constante, due à h, produisant la vitesse théorique $\sqrt{2gh}$, de l'autre une résistance dont rien ne vient détruire les accélérations négatives ou retards successifs, qui se développent au fur et à mesure que L augmente.

En appliquant à un tuyau l'expérience de Bossut, l'on prouverait de même, par l'uniformité, la nature négativement accélératrice de la viscosité.

Soit, maintenant, une molécule M (fig. 16), prise sur le filet supérieur d'un liquide en mouvement dans un canal; elle éprouve en a, du côté d'amont, une pression suivant mn, supérieure à la pression contraire qui existe en b, vers l'aval; la molécule tend donc à se mouvoir et à descendre sous l'action de la différence, infiniment petite il est vrai, entre les pressions en a et en b. Or, l'on se trouve ici dans le cas des corps pesants qui descendent sur un plan incliné, en vertu de la composante P sin. i de leur poids $P = gM$, où M est la masse et g l'accélération due à la gravité; si donc l'on représente par ab la valeur du poids gdm de la molécule M, la différence des pressions dues à la pesanteur et exercées en a et b, doit s'exprimer par cb; en

d'autres termes, l'action exercée par la pesanteur sur une molécule M étant $gdm.$ sin. i, en vertu des lois du plan incliné, si l'on fait $ab = gdm$ l'on en conclut, dans le triangle abc :

$$ac = ab \text{ sin. } i = gdm. \text{ sin. } i$$

Faisant $ac = dz$, l'on obtient :

$$dz = gdm. i$$

attendu que l'angle i est toujours assez petit dans les cours d'eau naturels, pour pouvoir être confondu avec l'arc ou la tangente.

Ou bien, comme $tg. i = \frac{ac}{cb} = p'$, la pente de la surface :

$$dz = gdM. \frac{ac}{cb} = gdM. p'$$

Ainsi la force motrice, qui est ici la composante de la pesanteur, est égale à $gdM. p'$; et l'accélération correspondant à cette force motrice sera gp', puisque c'est la force motrice sous l'unité de masse.

Lorsque le canal est long et régulier, le mouvement y est uniforme, ainsi que nous l'avons vu, par suite de l'action de la viscosité ; dès lors, il passe un même volume d'eau par chaque section de la masse liquide en mouvement ; si, donc la largeur du canal est constante, ou à peu près, la profondeur d'eau z devra rester sensiblement invariable, et la surface liquide y sera *parallèle à celle du fond.* Par suite, l'on aura :

$$dz = gdM. p' = gdM. \frac{AC}{CB} = gdM. p$$

où p est la pente du fond du canal.

Dans un long tuyau incliné, l'eau se meut, comme dans un canal, en vertu de son poids, ou plutôt de la partie $gM.$ sin i, rendue active par la pente du tuyau ; la force accélératrice est encore gp. Il en résulte, qu'en adaptant à la partie supérieure AA' d'un réservoir N (fig. 17), soit un canal, soit une suite de tuyaux AB, le liquide sortirait en BB' avec une vitesse théorique due à la hauteur LB, dans le cas où la viscosité serait nulle (ainsi que la contraction).

Dans les canaux naturels il n'existe pas de pression sur le fluide qui y entre ; le contraire se présente, d'ordinaire, en tête des tuyaux de conduite. Par exemple, si le tuyau AB, se trouvait en CD (fig. 17), il existerait en CC' une pression, en vertu de laquelle l'eau entrerait

dans le tuyau CD avec une vitesse due à la hauteur EL. D'après les principes du mouvement accéléré, cette vitesse doit s'ajouter à celle que le liquide acquiert de C en D, par l'effet de la pente; de sorte que, dans le cas d'une viscosité nulle, le liquide sortirait en DD' avec une vitesse due à LD. Ce dernier cas peut être ramené à celui des canaux découverts, en supposant que le tuyau CD soit remplacé par un canal imaginaire KCD, puisque dans les deux cas la vitesse de sortie en DD' serait la même.

Ainsi, dans les tuyaux, l'on a même force accélératrice et même force retardatrice que dans les canaux; le mouvement y est de même nature, sans pour cela être tout à fait identique, et l'on pourrait presque dire que, dans les tuyaux, le mouvement n'est qu'un cas particulier de celui des canaux, la partie supérieure du canal étant censée couverte. Ajoutons, toutefois, qu'il existe en réalité, quelques différences dont nous tiendrons compte.

Des considérations précédentes, l'on peut conclure :

1° Que, lorsque l'eau se meut *uniformément* dans un canal ou un tuyau, la résistance qu'elle y éprouve, c'est-à-dire *les forces développées par la viscosité sont égales à la force accélératrice résultant de la gravité*, puisqu'elles lui font équilibre.

C'est là le *principe fondamental* des eaux courantes.

2° Que les forces développées par la viscosité, devant équilibrer successivement toutes les accélérations de vitesse que la gravité tend à engendrer, *la viscosité est proportionnelle à la vitesse*, ou plutôt doit s'exprimer par une certaine *fonction de la vitesse* qu'il s'agit de rechercher.

Tel est le deuxième principe qui conduit à la solution mathématique des problèmes les plus importants de l'hydraulique.

Il nous reste à conclure le troisième :

3° Les résistances engendrées par la viscosité sont, dans certaines limites, *indépendantes de la pression* du fluide, au point où ces résistances s'exercent.

Dubuat s'est assuré de cette propriété par l'expérience suivante. Ayant établi, au moyen d'un tuyau, la communication entre deux bassins, il reconnut que la quantité d'eau qui s'écoulait de l'un dans l'autre restait constante, pourvu que leur différence H — H' de niveau

et la différence des pressions, à la surface de chacun d'eux, ne changeassent pas, et cela, quoique la pression dans un point quelconque du tuyau fût variable d'une expérience à l'autre par suite des variations de H et de H' dans l'équation $H - H' = C$, ou constante.

Les expériences récentes faites par M. D'Arcy (1) sont venues confirmer le principe précédent; cet éminent ingénieur, enlevé trop tôt à la science, a généralisé les résultats de Dubuat en faisant varier les pressions absolues entre de plus grandes limites.

c. Variations de la pression.

D'après la quatrième règle citée au § *d'* de l'hydrodynamique (chapitre premier. C), *la pression*, dans une section transversale d'un tuyau cylindrique, variera suivant la *loi hydrostatique*, pourvu que le liquide y ait un mouvement permanent rectiligne, chaque molécule ayant une vitesse parallèle à l'axe et aux génératrices censées droites. En effet, cela entraîne comme conséquence que la vitesse de chaque molécule est constante, c'est-à-dire que le mouvement est *uniforme*.

La même propriété appartient à un liquide coulant, en ligne droite et d'un mouvement uniforme, dans un canal découvert. Il suit de là que les lignes d'égale pression doivent être des horizontales, pour une même section, s'il s'agit d'un liquide pesant; que la surface libre de ce dernier doit être aussi une horizontale dans la section considérée (voir le § *c*, chapitre premier. B); qu'enfin, le niveau piézométrique est constant pour tous les points d'une même section; les colonnes, débouchant dans l'air, se termineraient toutes à l'horizontale supérieure du liquide, dans le profil.

Dans les cours d'eau naturels, le mouvement n'est jamais rigoureusement uniforme et rectiligne. Sans doute, il existe des circonstances où les propriétés précédentes peuvent être approximativement acceptées; mais il en est d'autres où il serait inexact d'admettre, pour un mouvement *varié*, et même pour un mouvement *permanent* mais non uniforme, que les vitesses des filets, qui traversent une section quelconque, *varient d'un filet à l'autre dans cette section*, suivant *la*

(1) *Mémoires présentés à l'Académie des sciences de Paris*, tome XV.

même loi que lorsque le mouvement est uniforme. Quoi qu'en ait supposé M. *Belanger*, dans ses leçons lithographiées, cette hypothèse est contraire aux lois de la mécanique; le mouvement varié change complétement la distribution des vitesses dans les filets. Nous reviendrons sur ce sujet en traitant de l'équation différentielle du mouvement permanent varié dans les eaux courantes.

Il est facile de constater, par expérience, les différences de vitesse qui existent, dans une *même section*, soit pour un tuyau de conduite à section circulaire, soit pour un canal découvert, entre les différents filets liquides qui coupent cette section. Dans le premier cas, en mesurant, au moyen d'*hydromètres*, les vitesses à diverses profondeurs, l'on remarque que, pour un même cylindre liquide infiniment mince, concentrique au tuyau, les vitesses des filets ou des génératrices sont égales; et que les vitesses vont en croissant d'une couche cylindrique liquide à l'autre, lorsqu'on s'avance de la circonférence vers le centre.

De même, il a été constaté depuis longtemps que les vitesses aux différents points d'une *même section*, dans un canal découvert ou un cours d'eau naturel, ne sont pas les mêmes; que la vitesse maxima V se trouve à la surface, vers le point qui correspond à la plus grande profondeur du profil, et que la vitesse minima se rencontre en quelque point du fond, dans les circonstances normales de l'écoulement. Nous représenterons par W la vitesse au point du fond correspondant à la verticale de la plus grande profondeur.

L'on conçoit, *à priori*, que l'influence exercée sur la vitesse, par la paroi solide du fond, doit se remarquer aussi pour le restant du lit, et que, par suite, les divers filets d'un liquide en mouvement, dans un canal, ont une vitesse d'autant plus grande qu'ils sont plus éloignés des parois. Il est aisé d'en conclure que, plus ces parois auront d'étendue, c'est-à-dire, plus, sur l'unité de longueur, le *périmètre mouillé* χ sera grand, plus la résistance, *due à l'adhérence*, sera considérable.

d. Courbe des vitesses.

Si, dans la section normale AB (fig. 18), l'on désigne par V, v, v', v''..... W les vitesses des tranches horizontales, d'épaisseur dz, en A, a, a', a''..... B, l'on conçoit la possibilité d'exprimer, par une

courbe, les variations qui existent de la surface au fond. Il suffit de porter, dans un plan parallèle au courant, des ordonnées $Am = V$; $ab = v$; $a'b' = v'$; etc., et $Bn = W$, c'est-à-dire des longueurs proportionnelles aux vitesses en A, a, a', etc., et de faire passer une courbe par leurs extrémités m, b, b', etc. Dans tous les calculs ultérieurs nous désignerons par U la vitesse *moyenne*.

Nous verrons plus loin que, dans le mouvement uniforme, l'on peut approximativement admettre, avec *Dupuit*, que cette courbe est une *parabole* du second degré, dont la ligne AmX de la surface naturelle du courant serait l'axe. Cette hypothèse n'est pas tout à fait rigoureuse, les observations de M. D'Arcy ayant suffisamment prouvé que la résistance due à la cohésion doit être représentée par $\varepsilon\left(\frac{dv}{dz}\right)^2$, au lieu de $\varepsilon\frac{dv}{dz}$ comme l'a admis Dupuit, dans les calculs de la courbe.

L'expérience est d'accord avec la théorie, quant à l'indication générale du sens de la courbe des vitesses. De nombreux essais ont été tentés pour déterminer exactement la loi de variation; mais les hydromètres n'étant pas arrivés au degré de précision nécessaire, la loi exacte n'a pu être formulée. Les premières tentatives datent de la seconde moitié du XVIIIe siècle; elles furent exécutées en Italie. Peu après, en 1789 et 1790, *Brünings* fit un grand nombre d'expériences, au moyen de son *tachomètre*, sur les divers bras du Rhin qui traversent la Hollande. De ses observations, l'on conclut que la vitesse diminue graduellement à partir de la surface, ou plutôt, à partir d'une petite distance prise en dessous de celle-ci; et que la diminution, faible d'abord, augmente de plus en plus à mesure que l'on approche du fond. Dans les expériences faites sur l'Arno, par *Ximénès*, les différences entre la vitesse à la surface V et la vitesse moyenne U ne s'élevaient pas à 1/10 de la valeur de V (*Dubuat* a trouvé 2/10 en moyenne); en outre, le rapport $\frac{U}{V}$ variait suivant les endroits; il allait en décroissant, à mesure que la profondeur augmentait, depuis 0,934 jusqu'à 0,919; cependant cette dernière conclusion est faite aux dépens de plusieurs anomalies.

D'après *Woltmann*, la courbe des vitesses est une *parabole* (fig. 18).

Concluant de nombreuses mesures faites dans l'Elbe, le Weser, la Saale, etc., *Funk* adopta la *logarithmique,* c'est-à-dire une courbe telle que, pour des profondeurs croissant en progression arithmétique la vitesse décroisse en progression géométrique.

Eytelwein, ne reconnaissant pas les expériences antérieures comme suffisamment normales entre elles, admit, pour la meilleure approximation, une décroissance de vitesse en progression arithmétique et une diminution de $\frac{1}{40}$ de V par chaque mètre d'enfoncement. Mais ces hypothèses sont loin d'être d'accord avec les expériences de *Brünings.*

D'Aubuisson résume de la manière suivante les essais des savants précités ainsi que ceux de MM. *Raucourt* et *Defontaine :* « La seule « conséquence que l'on puisse tirer des observations connues, et en « particulier de celles que M. Defontaine a faites sur le Rhin, à l'aide « du moulinet de Woltmann, c'est que, en général, et à mesure que « l'on s'enfonce en dessous de la surface, dans une rivière, la vitesse « de l'eau diminue graduellement, d'une manière insensible, puis de « plus en plus prononcée, qui croît assez rapidement aux approches « du fond où la vitesse W est encore, presque toujours, plus que la « moitié de la vitesse V à la surface. »

Dans le mémoire que nous avons déjà cité, M. *Sonnet,* ainsi que Woltmann et Dupuit, admet que la vitesse des différentes couches, dans un tuyau cylindrique circulaire, va en décroissant de l'axe à la paroi, comme les ordonnées d'une parabole. La vitesse *moyenne* serait, d'après lui, une moyenne arithmétique entre la vitesse centrale V et celle à la paroi, ou W, conformément à ce qui a été trouvé par Dubuat; il en résulte que le rapport $\frac{U}{V}$, entre la vitesse moyenne et la vitesse la plus grande, serait compris entre $\frac{1}{2}$ et 1. Nous reviendrons sur ce mémoire.

e. Vitesse moyenne.

Si l'on connaissait exactement la courbe réelle des vitesses, il serait facile de calculer immédiatement la vitesse moyenne *dans une*

section donnée AB (fig. 18). En effet, en admettant que *mn* soit une branche de parabole, il suffit d'avoir recours à cette propriété bien connue : que le segment *tmnt* est les $\frac{2}{3}$ du rectangle construit sur les coordonnées *tm* et *nt*. Si *mn* était une ligne droite, l'on aurait évidemment pour U la moyenne entre V et W. (Formule de Dubuat.)

La recherche de la vitesse moyenne est d'une haute importance; en effet, dans l'estimation de la dépense d'un canal ou d'un cours d'eau quelconque, l'on peut admettre que la masse en mouvement est douée d'une vitesse *moyenne ;* ce sera alors celle qui, étant multipliée par la section du volume liquide, donne la quantité écoulée en une seconde, ou la *dépense.*

B. DES TUYAUX DE CONDUITE.

I. *Le mouvement étant rectiligne et uniforme. Tuyaux cylindriques simples, circulaires et à débit constant.*

L'on désigne généralement sous le nom de conduites *cylindriques* celles dont la section transversale est constante; elles seront des conduites *cylindriques circulaires* si leur section est un cercle. Le profil longitudinal d'une conduite peut d'ailleurs présenter des accidents, pourvu que les lignes qui le composent se raccordent par des courbes adoucies.

Une conduite est simple si aucune autre ne s'embranche sur elle, entre les points extrêmes. Elle est à *débit constant* lorsqu'il n'y a pas d'orifice percé sur son parcours.

a. Recherche de la vitesse moyenne.

Nous avons déjà vu que, dans le mouvement rectiligne et uniforme, les forces développées par la pesanteur et la viscosité sont parallèles à l'axe du cylindre ; qu'en outre, pour une même couche, concentrique au tuyau, les vitesses des molécules sont égales, et qu'elles vont en croissant d'une couche à l'autre en procédant de la circonférence au centre. Nous savons aussi que, dans une même section transversale la pression varie suivant la loi hydrostatique ; que, par suite, le niveau

piézométrique y est le même pour tous les points, puisque la différence de hauteur des colonnes doit égaler la différence de niveau de leurs bases, c'est-à-dire que ces colonnes débouchant librement dans l'atmosphère, se termineraient toutes à une parallèle aux génératrices du cylindre.

Supposons qu'une molécule *a* (fig. 44), prise dans la section droite AB, ait parcouru la distance *ab* avec une vitesse uniforme; appelant encore θ la charge FC′ de cette molécule entre les deux positions *a* et *b*, nous aurons une expression de la forme :

$$\theta = -\frac{1}{g}\int \psi' \cos.\ \alpha ds$$

ainsi que nous l'avons démontré en généralisant le problème de D. Bernouilli.

Comme l'angle α est, dans ce cas-ci, égal à 180°, et que ψ' est constante sur tout le trajet *ab*, attendu qu'elle dépend uniquement de la loi de variation des vitesses d'une couche cylindrique à l'autre, il en résulte :

$$\theta = -\frac{\psi'}{g}\int \cos.\ 180^\circ\, ds = \frac{\psi'}{g}\int_0^L ds$$

$$\theta = \frac{\psi' L}{g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (m)$$

expression dans laquelle L représente la longueur *ab*.

D'après la relation précédente, il est facile de s'assurer que ψ', ne dépendant que de *g*, L et θ, c'est-à-dire de quantités constantes, est elle-même invariable pour toutes les molécules comprises dans le volume ABDC; il suit de là que sa valeur peut s'obtenir aussi en recherchant la force totale produite par la viscosité sur le volume en question, et en divisant ensuite cette résultante par la masse de ce volume.

Or, l'influence de la viscosité se réduit, pour un cylindre liquide en mouvement, à l'action de l'*adhérence* seule, attendu que les réactions mutuelles des tuyaux idéals liquides se résument en une série de forces élémentaires $\varepsilon\left(\frac{dv}{dr}\right)^m$ égales deux à deux et de sens contraire ; l'on voit en effet que, dans le demi-cylindre inférieur, l'action d'une couche

sur une autre est accélératrice, tandis que le contraire arrive pour la partie supérieure, où les vitesses vont en décroissant de l'axe à la paroi. La valeur de l'adhérence, rapportée à l'unité de surface, est représentée par une certaine fonction f de la vitesse W à la paroi; et si R est le rayon du tuyau, et L sa longueur, son intensité totale sera égale à 2π. RL. f(W). Quant à la masse ABDC, elle a pour valeur le volume πR^2L, multiplié par le poids Δ du mètre cube de l'eau ou du liquide, et divisé par g. L'on a donc l'équation :

$$\psi' = \frac{2\pi RL.\, f(W).\, g}{\pi R^2 L \Delta}$$

$$\psi' = \frac{2g}{\Delta R} \cdot f(W) \text{ ..... } (n)$$

Égalant les deux valeurs de ψ' tirées des équations (m) et (n), l'on en tire :

$$\frac{R\theta}{2L} = \frac{1}{\Delta} \cdot f(W) \text{ ..... } (o)$$

Relation qui donne W si l'on connait la fonction f.

La vitesse W étant ainsi déterminée, nous allons chercher une relation entre V et W, afin de connaître la vitesse à l'axe, c'est-à-dire celle du filet central. Nous exprimerons alors, en fonction de V, la vitesse v d'un filet quelconque, ou la loi de variation des vitesses d'une couche cylindrique à l'autre.

Supposons, à cet effet, que les deux sections normales AB et CD soient infiniment rapprochées, de façon que $ab = dL$. Dans la section AB (fig. 45), formons le quadrilatère infinitésimal $mpqn$, dans lequel :

$$Om = r,\ On = r + dr,\ \text{Angle } pOm = d\omega,\ mp = rd\omega$$

Ce quadrilatère est la base d'un prisme de longueur dL, dont le volume a pour expression $rd\omega drdL$, et la masse $\frac{\Delta}{g}\, rd\omega drdL$. La *cohésion* exerce son action sur les faces projetées en mp et en nq ; elle tend, sur nq, à retarder la vitesse des filets, et l'action contraire a lieu entre la face inférieure mp du prisme et la face supérieure mp du cylindre liquide intérieur qui lui est accolé. Il suit de là que, des deux composantes de la cohésion totale, l'une est négative et l'autre positive.

L'intensité de la cohésion étant représentée par $\varepsilon\left(\frac{dv}{dr}\right)^m$ sur l'unité de surface, elle sera, sur la face mp, égale à

$$\varepsilon r d\omega d\mathrm{L}\left(\frac{dv}{dr}\right)^m$$

Mais comme v décroît quand r augmente, la dérivée $\frac{dv}{dr}$ est négative; la composante sur mp sera donc :

$$-\varepsilon r d\omega d\mathrm{L}\left(-\frac{dv}{dr}\right)^m$$

En nq la composante sera égale à la précédente augmentée de sa différentielle par rapport à r, ou bien :

$$\varepsilon r d\omega d\mathrm{L}\left(-\frac{dv}{dr}\right)^m + \varepsilon d\omega d\mathrm{L}\frac{d}{dr}\left[r\left(-\frac{dv}{dr}\right)^m\right]dr$$

La somme des deux composantes représentant l'intensité totale de la cohésion, celle-ci aura pour valeur absolue :

$$\varepsilon d\omega d\mathrm{L}\frac{d}{dr}\left[r\left(-\frac{dv}{dr}\right)^m\right]dr$$

et par suite :

$$\psi' = \frac{\varepsilon d\omega d\mathrm{L}\frac{d}{dr}\left[r\left(-\frac{dv}{dr}\right)^m\right]dr}{\frac{\Delta}{g}r d\omega d\mathrm{L} dr}$$

$$\psi' = \frac{\varepsilon g}{\Delta r}\cdot\frac{d}{dr}\left[r\left(-\frac{dv}{dr}\right)^m\right] \text{ ..... } (p)$$

Égalant les deux valeurs de ψ' extraites des équations (m) et (p), l'on obtient :

$$\frac{\theta\Delta}{\varepsilon\mathrm{L}}\cdot r = \frac{d}{dr}\left[r\left(-\frac{dv}{dr}\right)^m\right]$$

L'intégration donne :

$$\frac{\theta\Delta}{2\varepsilon\mathrm{L}}\cdot r^2 = r\left(-\frac{dv}{dr}\right)^m \text{ ou } \frac{\theta\Delta}{2\varepsilon\mathrm{L}}r = \left(-\frac{dv}{dr}\right)^m$$

La constante y est nulle puisque $r = o$ donne zéro dans le deuxième membre. D'où :

$$-\frac{dv}{dr} = \left(\frac{\theta\Delta}{2\varepsilon\mathrm{L}}\right)^{\frac{1}{m}} r^{\frac{1}{m}}$$

$$-v = \left(\frac{\theta\Delta}{2\varepsilon\mathrm{L}}\right)^{\frac{1}{m}}\frac{r^{\frac{1}{m}+1}}{\frac{1}{m}+1} + \mathrm{C}$$

Pour déterminer C, faisons encore $r = o$, ce qui correspond à la vitesse V du filet dans l'axe; il en résulte :

$$-V = C \text{ ou } C = -V$$

et par conséquent :

$$-v = \left(\frac{\theta\Delta}{2\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{r^{\frac{1}{m}+1}}{\frac{1}{m}+1} - V$$

$$v = V - \frac{m}{m+1}\left(\frac{\theta\Delta}{2\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot r^{\frac{1}{m}+1} \quad \ldots\ldots\ldots (q)$$

Équation générale qui exprime la vitesse d'un filet quelconque en fonction de V. Pour déterminer cette vitesse centrale V en fonction d'une quantité connue, faisons $r = R$ dans l'équation précédente; à cette condition répond celle de $v = W$ vitesse à la paroi :

$$W = V - \frac{m}{m+1}\left(\frac{\theta\Delta}{2\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot R^{\frac{m+1}{m}}$$

$$V = W + \frac{m}{m+1}\left(\frac{\theta\Delta}{2\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot R^{\frac{m+1}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots (r)$$

La combinaison des expressions (q) et (r) donne l'équation suivante, qui exprime, pour une même section transversale, la relation ou la loi entre les vitesses aux différents points de la section :

$$\frac{V - v}{V - W} = \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{m+1}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots (s)$$

Pour connaître la véritable valeur de m, c'est-à-dire celle qui fasse de l'équation (s) l'expression rigoureuse de ce qui se passe dans la réalité, il faut d'abord constater avec précision les valeurs de V, W, et celles de v correspondant à différents points de la section; ayant conclu chaque fois la valeur du rapport $\frac{V - v}{V - W}$, il reste à chercher celle qu'il faut donner à m, dans l'expression $\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{m+1}{m}}$, pour que l'égalité ($s$) soit satisfaite.

Nous reviendrons plus loin sur cette question, en examinant les théories et les formules émises successivement par les hydrauliciens.

Cherchons maintenant à exprimer la vitesse moyenne U, d'une section quelconque, c'est-à-dire, celle qui, multipliée par l'aire de cette section, donnerait la dépense réelle.

D'après les notations déjà employées, le débit par l'élément *mpqn* (fig. 45) de surface doit être représenté par $vrd\omega dr$; la dépense totale sera donc :

$$Q = \iint vrd\omega dr$$

où v est une fonction de la variable r, et des quantités W, θ, L, R, si on l'exprime d'après l'équation (q), après avoir remplacé V par sa valeur prise dans la relation (r).

Comme la dépense Q se représente aussi par $\pi R^2 U$, l'on obtiendra :

$$\pi R^2 U = \iint vrd\omega dr$$

L'intégration étant faite, par rapport à ω entre zéro et 2π, il viendra :

$$\pi R^2 U = \int_0^R 2\,\pi vrdr$$

et, après avoir remplacé v par sa valeur tirée de l'équation (s) :

$$R^2 U = 2\int_0^R \left[V - (V - W)\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right] rdr$$

$$R^2 U = R^2 V - \frac{2m}{3m+1}(V - W)\frac{R^{\frac{3m+1}{m}}}{R^{\frac{m+1}{m}}}$$

$$U = V - \frac{2m}{3m+1}(V - W) \;\ldots\ldots\ldots\; (t)$$

L'on voit que la vitesse moyenne s'exprime aussi en fonction de W, R, θ et L, ou bien de W, R et $\frac{\theta}{L}$.

Si l'on voulait déterminer, par expérience, le coefficient de la cohésion ε, il faudrait mesurer une série de valeurs de V et W correspondantes à des valeurs données de R et $\frac{\theta}{L}$ considérées comme variables; remplaçant V et W dans (r) par leurs valeurs précitées, obtenues

expérimentalement, l'on obtiendrait des séries de relations ne contenant plus que les inconnues m et ε, et au moyen desquelles ces inconnues seraient déterminées et contrôlées par la répétition.

Quant à la détermination de la fonction f (W) correspondant à l'adhérence, après l'avoir représentée par un développement de la forme :

$$f(W) = A + BW + CW^2 + DW^3 + \ldots\ldots\ldots W^m = \frac{1}{2} \Delta R \frac{\theta}{L}.$$

ainsi que nous l'avons trouvé en (o), l'on donnerait, dans la relation précédente, à W une série de valeurs, mesurées expérimentalement, et à R et $\frac{\theta}{L}$ les valeurs correspondant à ces expériences; il en résulterait un certain nombre d'équations au moyen desquelles il serait possible de déterminer les constantes inconnues A, B, C, D, etc.

Telle serait la marche rationnelle à adopter pour résoudre rigoureusement le problème de l'écoulement uniforme d'un liquide dans les tuyaux cylindriques rectilignes ou convenablement raccordés. Malheureusement les formules trouvées sont loin de résoudre la question sous le rapport pratique; en effet, ce qu'il importe d'avoir, c'est l'expression de la résistance due à la viscosité, qui se borne ici à l'adhérence, d'après (n), non pas en fonction de la vitesse W du fond, mais bien de la vitesse moyenne U. Celle-ci, ou la dépense Q, ce qui revient au même, est ordinairement la donnée ou l'inconnue principale des problèmes d'hydrodynamique, tandis que W n'a guère d'importance pratique et ne peut être connue que par des expériences spéciales et très-difficiles.

b. **Théories et formules de Dubuat, Coulomb, Girard, De Prony, Eytelwein, D'Aubuisson, Navier, Dupuit, Belanger, Tadini, de Saint-Venant, Sonnet et D'Arcy. — Examen critique de la formule $F(U) = \alpha U + \beta U^2$.**

1° *Dubuat, Coulomb, Girard,* etc.

La théorie de Dubuat, pour l'écoulement des liquides, repose essentiellement sur une fausse conclusion qu'il a tirée de quelques-unes de ses expériences par laquelle il admettait que la vitesse moyenne U est une fonction de la vitesse W à la paroi, ou au fond, indépendante

de la figure, de la grandeur et de la pente du canal ou du conduit. Ce qui est complétement inexact.

Outre cette prémisse, Dubuat admettait l'existence d'une couche liquide adhérente à la paroi et dont la vitesse serait nulle. Cette hypothèse, parfaitement inutile du reste, servait en même temps à justifier d'autres expériences aussi peu rigoureuses que les premières, et d'après lesquelles l'action de l'adhérence (du frottement, suivant Dubuat, Girard, etc.) serait indépendante de la nature des parois.

Ainsi que nous l'avons déjà exposé au chapitre I, § g', ces divers principes n'en ont pas moins servi plus ou moins de guides à un grand nombre d'hydrauliciens distingués, tels que Coulomb, Bossut, Girard, De Prony, D'Aubuisson, etc. Il en résulte que l'on trouve, chez tous ces auteurs, une appréciation inexacte des résistances dues à la viscosité. D'après eux, le filet qui glisse immédiatement sur la paroi éprouve deux espèces de résistances : l'une, particulière à cette paroi, et l'autre qui proviendrait du glissement de ce filet sur le revêtement aqueux hypothétique dont nous avons parlé. Supposant la seconde, proportionnelle à la vitesse W, à la paroi, et la première, proportionnelle au carré de cette même vitesse, ils en sont arrivés à représenter la résistance totale par une certaine fonction de W de la forme :

$$F(W) = MW + NW^2 \text{ ..... } (x)$$

Mais l'hypothèse d'une résistance indépendante de la forme, de la section et de la pente des tuyaux, entraîne nécessairement avec elle la condition d'un rapport constant :

$$\frac{W}{U} = \text{constante} = k$$

quel que soit le tuyau et son inclinaison ; il suit de là que l'équation (x) peut être remplacée par la suivante :

$$F(U) = \alpha U + \beta U^2 \text{ ..... } (y)$$

dans laquelle $\alpha = Mk$ et $\beta = Nk$.

Telle est la formule générale présentée encore de nos jours, non pas comme une simple formule d'interpolation, mais comme une loi naturelle, une expression rigoureuse des phénomènes de la viscosité, dans laquelle le terme en αU exprimerait la résistance due à la

cohésion, et βU^2 la composante provenant de l'adhérence aux parois. Par suite, les deux coefficients α et β furent considérés comme deux quantités, constantes dans tous les cas, et que l'expérience pouvait déterminer.

2° *De Prony.*

C'est en s'appuyant sur les principes de Dubuat que M. De Prony a établi les équations d'équilibre d'une masse liquide coulant dans un tuyau, avec une vitesse quelconque. Il est juste d'ajouter cependant que cet illustre mathématicien n'ignorait nullement la fragilité et l'incertitude des principes en question. Ainsi, pour le cas d'un canal rectangulaire, lorsque, à l'exemple de ses prédécesseurs, il substitue la vitesse moyenne à la vitesse du fond ou des parois, c'est-à-dire, l'équation (y) à l'équation (x), il ne peut s'empêcher d'exprimer ses doutes sur la légalité mathématique de cette transformation. « Il est « difficile, dit-il (1), de se persuader que ces divers éléments (la « figure, la section et la pente) n'aient aucune influence sur les rela- « tions entre la vitesse du fond, la vitesse moyenne, et la vitesse à la « surface. Mais il fallait pourvoir aux besoins de la pratique par des « règles suffisamment exactes pour les cas qu'elle peut avoir à traiter, « et les recherches des lois générales et rigoureuses auxquelles les « phénomènes sont assujettis offrent encore un problème où les géo- « mètres et les physiciens trouveront à s'exercer sur des sujets dignes « de leur attention et de leur intérêt. »

Posons, avec De Prony, les notations suivantes ; soient :

i le sinus de l'angle du fond d'un canal ou d'un tuyau rectangulaire, d'une largeur indéfinie et dont les parois latérales soient censées n'opposer aucune résistance. (Cette quantité se confond avec l'arc ou la tangente dans les cas ordinaires de la pratique) (fig. 20).

H la hauteur de l'eau sur le fond CD.

z une partie de la hauteur, comptée à partir de la surface AX.

(1) De Prony, *Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes*, p. 79.

v^n, v^{n-1}....., v'', v' les vitesses des n diverses couches, depuis celle de la surface, ou v^n, jusqu'à celle du fond, ou v'.

δ la densité du fluide.

D'après l'auteur, le filet de la surface dont l'épaisseur est dz et dont la vitesse uniforme est v^n, se trouve dans le même cas qu'un solide glissant le long d'un plan incliné, et son équation d'équilibre est la même. Ce point de départ étant admis, voyons comment De Prony estime les forces sollicitantes.

Le filet liquide est soumis, d'une part, à l'action de la composante de son poids parallèle au fond, et qui est égale à ce poids multiplié par sin. i; c'est donc, par unité de masse :

$$\delta g.\ dz.\ \sin.\ i \text{ ou bien } \delta g.\ dz.\ i$$

le poids du filet par unité de longueur étant $\frac{\delta g.\ ds.\ dz.}{ds}$; nous supposons ici l'angle i très-petit.

D'autre part, la force retardatrice qui fait équilibre à la pesanteur, et qui n'est autre que la cohésion, dépend évidemment, d'après De Prony, de la vitesse relative $v^n - v^{n-1}$, du filet supérieur par rapport au filet immédiatement inférieur, et croît avec elle pour que le mouvement puisse se maintenir uniforme sous une inclinaison quelconque. L'on aura donc, suivant l'auteur, l'équation d'équilibre :

$$\delta g.\ idz = f(v^n - v^{n-1})$$

Ou bien :

$$\Delta idz = f(v^n - v^{n-1})$$

$$idz = \frac{1}{\Delta} f(v^n - v^{n-1})$$

que l'on peut encore exprimer comme suit, en supposant les coefficients de la fonction divisés par Δ, qui ne varie guère que d'un fluide à l'autre :

$$idz = f(v^n - v^{n-1}) \text{ ..... (A)}$$

la fonction f étant indéterminée, mais de nature à croître avec sa variable.

Quant au filet immédiatement inférieur au précédent, il reçoit de la pesanteur une force accélératrice proportionnelle à idz, et, de son glissement sur le filet inférieur qui va moins vite, une force retardatrice proportionnelle à $f(v^{n-1} - v^{n-2})$; mais, en outre, le filet supé-

rieur, qui glisse sur lui, l'entraîne avec une force accélératrice précisément égale à la précédente. Ainsi l'équation d'équilibre du filet qui se trouve immédiatement contre celui de la surface, sera représentée par :

$$idz = f(v^{n-1} - v^{n-2}) - f(v^{n} - v^{n-1}) \text{ ..... } (A')$$

L'on aurait de même :

$$idz = f(v^{n-2} - v^{n-3}) - f(v^{n-1} - v^{n-2}) \text{ ..... } (A'')$$

et pour le deuxième filet, à partir du fond :

$$idz = f(v'' - v') - f(v''' - v'') \text{ ..... } (A^{n-1})$$

Pour le filet du fond, De Prony admet avec Dubuat, Girard, D'Aubuisson, etc., l'existence d'une couche liquide adhérente à la paroi ; il en conclut, sur ce filet, l'action de deux résistances : l'une, particulière à la paroi, qu'il exprime par F (v') ; l'autre, qui proviendrait du glissement du filet sur le revêtement aqueux, et par conséquent de la même nature que la précédente, et qui peut se représenter par $f(v')$.

L'équation serait donc, pour la couche du fond :

$$idz = F(v') + f(v') - f(v'' - v') \text{ ..... } (A^{n})$$

La somme de toutes les équations précédentes donnera donc :

$$i.\, ndz = F(v') + f(v')$$

Ou bien :

$$Hi = \varphi(v')$$

où v' exprime la vitesse à la paroi, représentée antérieurement par W. Donc :

$$Hi = \varphi(W) \text{ ..... } (2)$$

Telle est l'équation fondamentale, démontrée par De Prony, comme nous venons de l'indiquer succinctement, et dans laquelle il a substitué à W la vitesse moyenne U, pour satisfaire aux besoins de la pratique.

La théorie précédente est entachée de nombreuses erreurs, qui proviennent essentiellement d'une fausse appréciation de la nature des résistances, ainsi que d'une représentation inexacte de leur valeur. Nous en avons déjà donné un aperçu dans le premier chapitre ; il nous paraît indispensable de le compléter afin de bien établir l'origine de formules si peu rigoureuses et si longtemps acceptées.

Remarquons d'abord que dans l'équation (2) la résistance totale φ (W) peut s'exprimer par F (v') + f (v'), c'est-à-dire par la somme des résistances dues respectivement à l'adhérence ou F (v'), et à la cohésion, ou $f(v')$, celle-ci étant, d'après De Prony, *de même nature* que la première.

Or, l'hypothèse d'un revêtement aqueux n'est pas plus admissible qu'elle n'est utile à la théorie; en outre, nous l'avons déjà dit, la cohésion est d'une nature toute différente de l'adhérence, et ne peut nullement se représenter par une fonction de même genre. C'est ce que nous allons démontrer, d'après Dupuit.

Si, au lieu de faire la somme des n équations d'équilibre A, A' A''..... A^n, nous ne faisons que la somme des $n - 1$ premières, nous aurons :

$$i\,(H - dz) = f\,(v'' - v')$$

Admettant que H — dz ne diffère pas sensiblement de H, nous poserons :

$$iH = f\,(v'' - v') \;\ldots\ldots\ldots\; (3)$$

Or, nous avons déjà trouvé, avec De Prony :

$$iH = F\,(v') + f\,(v')$$

D'où il résulte :

$$f\,(v'' - v') = F\,(v') + f\,(v') \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (4)$$

Que représente ici $v'' - v'$ dans la fonction du premier membre ? Évidemment une quantité infiniment petite, puisque c'est la vitesse *relative* de deux filets *contigus* ou infiniment rapprochés; et comme les vitesses vont en décroissant vers le fond, l'on peut poser :

$$f\,(v'' - v') = f\,(-\,dv)$$

où v exprime la vitesse variable; développant f $(-\,dv)$ suivant les puissances ascendantes de sa variable — dv, l'on obtient :

$$iH = -\,(\varepsilon dv + \varepsilon' dv^2 + \varepsilon'' dv^3 + \ldots\ldots\ldots)$$

et, comme l'on peut négliger les puissances de dv supérieures à la première, il résulte :

$$iH = -\,\varepsilon dv \;\ldots\ldots\ldots\; (5)$$

Ainsi, en admettant même toutes les hypothèses de De Prony, il faudrait au moins remplacer la fonction indéterminée f $(v'' - v')$ ou f $(-\,dv)$ par l'expression — εdv. Il est vrai que cette première

correction ne rendrait pas l'équation (5) plus rigoureuse, au point de vue de l'analyse et de la mécanique. Il est impossible d'admettre une équation aussi peu homogène, dans laquelle un seul membre est affecté d'un facteur infiniment petit, tandis que l'autre est fini. Cette anomalie provient de la condition toute naturelle que De Prony a omise, et qui consiste à mesurer la valeur d'une force par son action sur l'unité de masse, de vitesse ou de temps. Dès que l'on admet que la cohésion est proportionnelle à la différence infiniment petite dv des vitesses de deux couches contiguës, il faut, pour exprimer cette résistance, prendre une mesure de dv, en employant pour unité une quantité infiniment petite de même nature, telle que la distance de deux couches quelconques. L'on arrive donc logiquement à représenter la valeur de la cohésion par une expression de la forme :

$$\varepsilon \frac{dv}{dz} \text{ ou } \varepsilon \left(\frac{dv}{dz}\right)^m$$

comme nous l'avons déjà vu antérieurement, au chapitre I. § g', où la constante ε était provisoirement représentée par C.

Il nous sera facile de démontrer maintenant que l'hypothèse d'un revêtement aqueux sur les parois était si peu nécessaire à la théorie de M. De Prony et de ses imitateurs, qu'elle conduit l'illustre hydraulicien à une conclusion mathématique absurde.

Soit en effet la relation :

$$f(v') = f(v'' - v')$$

Si l'on suppose que $v'' - v'$ soit infiniment petit, et que v' soit une quantité finie ; si l'on admet aussi que la fonction f croisse avec sa variable, il est impossible de poser la relation précédente, à moins de considérer comme infiniment grands tous les coefficients A', B', C'..... du développement :

$$f(v'' - v) \text{ ou } f(dv) = A'dv + B'dv^2 + C'dv^3 + \ldots\ldots\ldots, \text{ etc.}$$

tandis que tous ceux de la série correspondant à $f(v')$ ou $f(v)$ resteraient finis.

De ce qu'il est inexact de poser :

$$f(v'' - v') = f(v')$$

résulte, à plus forte raison, l'inexactitude de l'équation (4) :

$$f(v'' - v') = f(v') + F(v')$$

Comme le terme $f(v')$ provient de l'hypothèse d'une couche fixe sur laquelle glisserait la seconde avec une vitesse finie, il en résulte que l'hypothèse est aussi inutile et aussi inadmissible que les équations qu'elle provoque ou qui en découlent.

Sans vouloir insister davantage sur les erreurs mathématiques et mécaniques de la théorie de M. De Prony, nous croyons encore nécessaire de prouver une anomalie qui a déjà été indiquée au ch. I. § g'.

Les équations précédemment posées nous donnent l'égalité suivante entre l'adhérence et la cohésion :

$$f(v'' - v') = \varphi(v')$$

$$f(v'' - v') = \varphi(v') = Hi \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Comme Hi est un produit fini, que v' est en réalité une vitesse finie, tandis que $v'' - v'$ est un infiniment petit, il arriverait qu'en développant la fonction $f(v'' - v')$, elle devrait avoir des coefficients infiniment grands, tandis que la fonction $\varphi(v')$ n'en a que de finis. Il faudrait donc, pour que les équations (6) pussent subsister que les fonctions φ et f fussent de nature tout à fait différente.

La formule générale trouvée par De Prony, pour exprimer la valeur totale de la viscosité, est présentée sous la forme suivante :

$$F(U) = \Delta(\alpha U + \beta U^2)$$

dans laquelle Δ représente le poids du mètre cube du liquide exprimé en kilogrammes.

De Prony a déterminé les constantes α et β au moyen de 51 expériences de Dubuat, Bossut et Couplet. Parmi ces dernières, 44 avaient été faites sur des tuyaux en fer-blanc de 0^m027 à 0^m054 de diamètre; les 7 autres provenaient d'observations de Couplet sur deux conduites très-longues et de 0^m135 et 0^m49 de diamètre respectif. Il en conclut :

$$\alpha = 0{,}0000173, \quad \beta = 0{,}000348$$

3° *Eytelwein.*

Ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, les formules d'Eytelwein, calquées sur celles de M. De Prony, ne sont guère plus exactes que ces dernières, malgré l'énorme quantité d'observations diverses que le premier a mises en usage.

Nous ne pouvons cependant passer outre, devant la confiance exagérée qui est accordée à ces formules, depuis 1816, même par d'éminents physiciens ou professeurs. C'est ainsi qu'elles constituent encore, dans certains cours de mécanique, la dernière expression de l'exactitude pratique, pour l'écoulement de l'eau dans des conduites d'une grande longueur.

Nous en donnerons, pour ce motif, un exposé succinct, d'après les leçons de mécanique appliquée (1) données actuellement à l'école militaire de Bruxelles.

Représentons par :

Δ le poids du liquide sous l'unité de volume;

χ le contour du périmètre mouillé de la conduite;

L la longueur de cette dernière;

Ω la surface de sa section normale.

Si U exprime encore la vitesse moyenne, la résistance des parois, c'est-à-dire *l'adhérence*, sera donnée par l'expression :

$$\frac{\Delta}{g} \cdot \chi \cdot \mathrm{L} \, (\alpha \mathrm{U} + \beta \mathrm{U}^2)^{\mathrm{kil}}.$$

le chemin parcouru par une tranche quelconque, dans le sens de cette résistance, et pour l'élément de temps, étant Udt, la quantité de travail élémentaire qu'elle développe le sera par :

$$\frac{\Delta}{g} \cdot \chi \cdot \mathrm{L} \, (\alpha \mathrm{U} + \beta \mathrm{U}^2) \cdot \mathrm{U} dt$$

et, comme l'élément de masse $d\mathrm{M} = \frac{\Delta}{g} \cdot \Omega \cdot \mathrm{U} dt$, l'expression de cette quantité de travail deviendra :

$$d\mathrm{M} \, \frac{\chi \mathrm{L}}{\Omega} \, (\alpha \mathrm{U} + \beta \mathrm{U}^2)$$

dont le double devra être retranché du second membre de l'équation des forces vives, concernant les quantités de travail des forces motrices. (Voir ch. I. § *e'*, 3° et ch. II. § *a*.)

Ces considérations étant appliquées au cas de la fig. 46, avec des

(1) Steichen, *Leçons autographiées de mécanique appliquée*.

notations analogues à celles de la fig. 23, l'on arrive à l'équation des forces vives :

$$U^2\left[1-\frac{m^2\sigma^2}{S^2}+m^2\sigma^2\left(\frac{1}{m'\sigma'}-\frac{1}{\Omega}\right)^2-\left(1-\frac{m\sigma}{S'}\right)^2\right]=2g\,(H-h)$$

$$+\frac{2g\,(P-p)}{\Delta}-\frac{2\chi L}{\Omega}(\alpha u+\beta u^2)$$

les vitesses U et u étant liées par la relation :

$$m\sigma.\,U=\Omega u$$

En effet, la force vive acquise par une tranche élémentaire dM, dans son passage du réservoir M au bassin inférieur N, se compose de celle qui lui a été imprimée de M en ab, ou :

$$dM\,(U^2-V^2)+dM.\,U^2.\,m^2\sigma^2\left(\frac{1}{m'\sigma'}-\frac{1}{\Omega}\right)^2$$

diminuée de celle qu'elle perd en débouchant dans le réservoir N, c'est-à-dire :

$$dM\,(U-V')^2=dM\left(U-U\frac{m\sigma}{S'}\right)^2$$

Ou bien :

$$dM.\,U^2\left(1-\frac{m\sigma}{S'}\right)^2 \;\ldots\ldots\ldots\; (7)$$

V et V′ étant les vitesses en M et N.

Si l'on suppose que les sections S et S′ des deux bassins soient très-considérables par rapport à σ ; que l'on fasse, en outre, $\sigma'=\Omega$ et $P=p$, la formule se simplifie, et devient :

$$U^2.\frac{m^2\sigma^2}{\Omega^2}\left(\frac{1}{m'}-1\right)^2=2g\,(H-h)-\frac{2\chi L}{\Omega}(\alpha u+\beta u^2)$$

Supposant ensuite $\Omega=\sigma$, l'on obtient :

$$U^2.\left(\frac{1}{m'}-1\right)^2=2g\,(H-h)-\frac{2\chi L}{\Omega}(\alpha u+\beta u^2)$$

qui donne la vitesse U dans la conduite, lorsque $H-h$ est connu.

Lorsque l'écoulement se fait à l'air libre par l'orifice ab, alors $h=o$ puisque le bassin inférieur disparaît. Dès lors aussi le

terme $U^2\left(1-\frac{m\sigma}{S'}\right)^2 dM$, donné plus haut (7), doit être supprimé, et l'équation devient :

$$U^2\left[1+\left(\frac{1}{m'}-1\right)^2\right]=2gH-\frac{2\chi L}{\Omega}.(\alpha U+\beta U^2)$$

dans laquelle, $P=p$; $\sigma=\Omega$; $m=1$; et $u=U$.

Ou bien aussi :

$$2gH=\frac{2\chi L}{\Omega}.(\alpha U+\beta U^2)+U^2\left[1+\left(\frac{1}{m'}-1\right)^2\right]$$

Considérant qu'en général L est très-considérable par rapport à Ω, ou au diamètre D du tuyau, le deuxième terme du second membre peut être négligé par rapport à la valeur du premier, c'est-à-dire de celui qui exprime l'action de l'adhérence. Il en résulte :

$$gH=\frac{\chi L}{\Omega}.(\alpha U+\beta U^2)$$

Eytelwein a tenu compte du terme $U^2\left[1+\left(\frac{1}{m'}-1\right)^2\right]$, et l'a représenté par $\frac{U^2}{\mu^2}$ en prenant pour μ la valeur :

$$\mu=\frac{13}{16}=0,8125$$

la contraction en $a'b'$ étant censée complète ; prenant le mètre comme unité linéaire, il a trouvé :

$$\alpha=0,0002193 \text{ et } \beta=0,0027496 \;\ldots\ldots\ldots\; (m)$$

$$U=\frac{-L+\sqrt{L^2+(560776L+3861755D)\,DH}}{25,0754L+1726,82D}$$

Admettant le terme en D^2 négligeable par rapport à L^2, sous le radical, et divisant haut et bas par 25,0754 L, l'expression devient :

$$U=\frac{-0,03988+\sqrt{0,0015904+891,84\frac{DH}{L}}}{1+68,865\frac{D}{L}}$$

D'après MM. Eytelwein et Steichen, l'on peut obtenir une formule plus simple quoique suffisamment exacte, en négligeant le terme αU ;

mais, pour la mettre d'accord avec l'expérience, il faudrait faire, avec Eytelwein :

$$\beta = 0{,}00349987 = 0{,}0035 \text{ environ}$$

et la vitesse U dans le tuyau devient alors :

$$U = 26{,}44 \sqrt{\frac{DH}{L + 54\,D}}$$

Ici s'arrêtent les considérations et les calculs de M. Steichen sur l'écoulement de l'eau dans les conduites.

Quant aux coefficients α et β indiqués par Eytelwein pour être substitués à ceux de M. De Prony dans la formule :

$$F(U) = \Delta\,(\alpha U + \beta U^2)$$

ils sont en réalité les suivants :

$$\alpha = 0{,}0000222 \text{ et } \beta = 0{,}000280$$

et correspondent très-bien à ceux qui ont été indiqués en (m), lorsqu'on divise ceux-ci par $g = 9{,}8088$.

Quoique le système que nous venons d'examiner soit déjà plus rigoureux que celui de Dubuat, Girard ou De Prony, il n'en est pas moins entaché d'importantes inexactitudes, qui ôtent aux formules finales toute garantie de vérité.

Si l'expression $\alpha\,U + \beta\,U^2$ n'est plus considérée ici comme une loi naturelle représentant l'action totale de la viscosité, elle suppose encore implicitement la possibilité de substituer U à W sans erreur sensible. Quant à la cohésion, il n'en est pas tenu compte; et l'influence de la viscosité semble se réduire à une sorte de frottement, indépendant de la pression, et d'une nature particulière. Voici en effet à quoi se bornent les considérations de M. Steichen sur cette importante résistance :

« Nous avons jusqu'ici fait abstraction d'une force retardatrice « qui n'a qu'une influence négligeable dans tous les cas où la vitesse « du fluide est très-petite et les sections très-grandes, mais dont il « faut tenir compte lorsqu'il s'agit de tuyaux d'une grande longueur « par rapport à leur diamètre; cette résistance est celle que les parois « opposent au mouvement du fluide, par suite de l'adhérence que « contractent avec elles les molécules immédiatement en contact. On « conçoit en effet facilement que, par suite de la viscosité plus ou

« moins grande du fluide, le retard éprouvé par ces molécules doit se « transmettre de proche en proche à toute la masse, et finalement « altérer le mouvement général. C'est ce que l'expérience vérifie pour « les liquides comme pour les fluides élastiques. »

Ainsi, pas la moindre notion sur la nature et la valeur de la cohésion. Or, bien que les composantes élémentaires de cette force s'entre-détruisent dans l'écoulement par les conduites, il n'en est pas moins indispensable de la connaître pour établir rigoureusement la loi des vitesses. Il est vrai que M. Steichen, comme Eytelwein, peut se dispenser d'y avoir égard, du moment où il admet, pour vitesse moyenne, l'expression empirique de Dubuat ou de De Prony, ainsi que nous le verrons plus loin.

4° *D'Aubuisson.*

Cet auteur, considéré encore comme classique, n'a absolument rien compris à la nature des deux résistances qui constituent la viscosité. S'il avait employé à cette étude un peu plus de la *théorie* qu'il tenait en si maigre estime, il serait arrivé peut-être, comme Dupuit et Navier, à distinguer l'essence de chacune d'elles, et il ne serait pas tombé, à la suite des *expériences* de Coulomb, dans l'erreur grossière de Dubuat, De Prony, etc., qui ont posé comme loi naturelle la formule d'interpolation correspondant à l'adhérence.

Voici, du reste, sa façon d'estimer les deux composantes de la viscosité.

Puisque la résistance qui détruit l'accélération de la pesanteur est un effet de l'action des parois, elle sera d'autant plus considérable que ces parois auront plus de développement, ou que le périmètre mouillé χ sera plus grand.

Mais cette résistance du périmètre se répartira entre toutes les molécules de la section, puisque leurs mouvements sont liés par une adhérence (D'Aubuisson confond l'adhérence avec la cohésion) mutuelle; ainsi, plus elles seront nombreuses, ou bien plus la section sera grande, moins la vitesse de chacune d'elles, et par suite la vitesse moyenne, en sera altérée. L'action de la viscosité varie donc en raison inverse de la surface de la section.

D'un autre côté, plus la vitesse sera grande et plus il faudra, dans un même temps, arracher de molécules à l'adhérence des parois; plus il faudra, en outre, les arracher promptement, et par conséquent consommer plus de force; de sorte que la résistance sera en raison doublée de la vitesse. Tel est le raisonnement singulier qui a servi à conclure que l'une des composantes est une fonction de v^2.

Quant à la deuxième composante (due sans doute au glissement du liquide sur le *revêtement aqueux* de D'Aubuisson), elle serait une fraction très-faible de la vitesse, qui disparaîtrait quand celle-ci serait grande. D'après l'auteur (1), cette force est inférieure à celle d'adhérence tant que la vitesse excède 0^m07; mais, en dessous de cette limite, elle devient prépondérante. Il ajoute la phrase suivante, qui est bien faite pour justifier notre avant-propos, et suggérer de légitimes défiances au sujet des expériences faites par les plus habiles hydrauliciens, et des conclusions qu'ils ont pu en tirer : « Cette résistance, « due à la viscosité (évidemment; mais à quelle partie?), devient « d'autant plus sensible, comparativement à la première, que la vi- « tesse est plus petite : Dubuat avait déjà remarqué ce fait important, « et Coulomb, par une série d'expériences *faites avec l'intelligence* « *et l'exactitude* qui le caractérisent, a trouvé qu'elle est simplement « *proportionnelle à la vitesse.* »

C'est en s'appuyant sur les considérations précédentes que D'Aubuisson arrive à représenter la résistance provenant de la viscosité, sur une longueur L, par une expression de la forme :

$$F(v) = A\frac{\chi L}{\Omega}(v^2 + Bv)$$

dans laquelle v est la vitesse à la paroi, A et B deux coefficients constants.

Admettant alors, d'après Dubuat et De Prony, que l'on puisse remplacer une fonction F (v) de la vitesse à la paroi par une fonction de même espèce F (U), dans laquelle U serait la vitesse moyenne, il en conclut :

$$F(U) = A'\frac{\chi L}{\Omega}(U^2 + B'U)$$

Restait à déterminer l'équation d'équilibre. Appelant H la charge

(1) D'Aubuisson, *Traité d'hydraulique.* 1834, p. 110.

de la conduite, ou LD (fig. 19), la vitesse de sortie en DD′ serait $\sqrt{2gH}$ si la résistance des parois, dit l'auteur, ne venait opposer une résistance au mouvement. La perte de charge, produite par cette résistance, est donc $H - \frac{v^2}{2g}$, et doit représenter la force retardatrice. De là, par extension :

$$H - \frac{U^2}{2g} = A' \frac{\chi L}{\Omega} (U^2 + B'U)$$

Pour la détermination de A′ et B′, D'Aubuisson se sert des observations de Couplet, déjà citées, et adopte l'équation :

$$H - \frac{U^2}{2g} = 0{,}0003425 \frac{\chi L}{\Omega} (U^2 + 0{,}055\ U)$$

trouvant très-inutile de tenir compte du terme $U^2\left[1 + \left(\frac{1}{m'} - 1\right)^2\right]$ ou $\frac{U^2}{\mu^2}$ d'après Eytelwein, puisque l'effet de la contraction est implicitement compris dans la valeur de A′ donnée par l'expérience.

Si le tuyau est à section circulaire, l'équation précédente devient :

$$H - \frac{U^2}{2g} = 0{,}0003425\ L \frac{\pi D}{\frac{\pi}{4} D^2} (U^2 + 0{,}055\ U)$$

$$H - 0{,}051\ U = 0{,}00137 \frac{L}{D} (U^2 + 0{,}055\ U)$$

Et comme la dépense Q est généralement l'inconnue ou la donnée principale, l'on obtient, en remplaçant U par $1{,}273 \frac{Q}{D^2}$:

$$H - 0{,}08264 \frac{Q^2}{D^4} = 0{,}002221 \frac{L}{D^5} (Q^2 + 0{,}0432\ QD^2)$$

Telle est l'équation générale présentée par D'Aubuisson pour résoudre tous les problèmes de l'écoulement de l'eau dans les conduites.

Il est juste d'ajouter cependant que l'auteur déclare n'avoir qu'une médiocre confiance relative dans l'exactitude des résultats que l'on obtiendrait en employant d'une manière absolue la formule précédente. Il allègue, avec beaucoup de raison et de perspicacité, les motifs suivants comme suffisants pour légitimer ses doutes :

1° Les expériences qui ont servi à la détermination des con-

stantes A′ et B′ ont été faites généralement sur des tuyaux de faible diamètre, de petite longueur, bien calibrés, bien unis entre eux, bien nets à l'intérieur.

2° Les tuyaux employés dans la pratique sont toujours plus ou moins déformés par le moulage, la cuisson ou la coulée; leur section n'est pas rigoureusement circulaire, leur réunion ne se fait jamais correctement dans un même axe, et leur surface intérieure n'est ni régulière ni bien unie.

3° L'air a une action sur l'écoulement, lorsque les conduites sont sinueuses dans leur plan vertical, car en se portant vers les parties supérieures, d'où il ne peut s'échapper, il produit par sa résistance des étranglements plus ou moins sensibles.

4° Enfin, comme les eaux charrient toujours des molécules terreuses, et qu'elles contiennent des sels qui se précipitent sur les parois, il arrive que la section finit par s'altérer d'une façon irrégulière, par diminuer de surface, et la dépense en est modifiée.

Par suite des motifs précités, D'Aubuisson recommande de diminuer de 1/3 à 1/2 le coefficient numérique de la dépense; et il avoue avoir adopté pour système d'augmenter idéalement de moitié la quantité d'eau que doit mener une conduite à établir, c'est-à-dire qu'il remplace, dans la formule, la dépense Q par $\frac{3}{2}$ Q, s'il s'agit de calculer le diamètre, la longueur ou la charge de la conduite.

L'expérience a légitimé les doutes de D'Aubuisson ; néanmoins il nous a semblé nécessaire d'insister sur le triste mérite d'une théorie et d'une formule employées si longtemps pour régler les lois des phénomènes les plus importants de l'hydrodynamique.

5° *Navier.*

Quoique M. Navier se soit tenu dans des généralités théoriques et qu'il ait adopté l'hypothèse inexacte de ses prédécesseurs, quant à la nature des composantes de la viscosité, il n'en a pas moins rendu de grands services à la théorie du mouvement des eaux courantes. C'est ainsi que, reconnaissant l'impossibilité mathématique d'estimer de la même manière deux forces d'ordre différent, il n'a accepté l'expres-

sion $F(U) = \alpha U + \beta U^2$ que comme une simple formule d'interpolation, et comme expression de la résistance provenant uniquement de l'adhérence. Appréciant, d'un autre côté, la différence infiniment petite $v^{n-1} - v^n$ des vitesses de deux filets contigus, et mesurant cette nouvelle force suivant les lois de la mécanique, il est arrivé, pour la valeur de la cohésion, à l'expression $\varepsilon \frac{dv}{dz}$, qui, sans être tout à fait satisfaisante, est déjà un notable progrès sur les mesures arbitraires et les notations inexactes de M. De Prony.

Il est à regretter que Navier ait pris pour principe que les actions répulsives des molécules doivent, pour la cohésion comme pour l'adhérence, être *également* modifiées ou diminuées de quantités *proportionnelles aux vitesses* avec lesquelles ces molécules s'éloignent ou se rapprochent les unes des autres ou des molécules *immobiles appartenant à la paroi.*

Après les considérations précédentes et celles qui ont été présentées au premier chapitre, nous n'entrerons pas dans de plus amples détails sur la théorie et les calculs de l'illustre mathématicien moderne. Cependant, avant de passer outre, il n'est pas hors de propos de chercher quels seraient les résultats produits par la conception hypothétique de l'auteur, si on l'introduisait dans les formules de la théorie générale exposée au chapitre IV, B, § *a*, d'après les ouvrages les plus récents de MM. Dupuit, Bresse, D'Arcy, etc.

Faisant donc $m = 1$ dans l'équation (s), l'on obtient :

$$\frac{V - v}{V - W} = \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

ou bien :

$$v = V - (V - W)\frac{r^2}{R^2} = M - N\frac{r^2}{R^2} \text{ ..... } (u)$$

De laquelle il résulterait, suivant Navier, que les vitesses décroissent à partir du filet central comme les ordonnées d'un *paraboloïde de révolution* ayant même axe que le tuyau.

L'hypothèse de $m = 1$ introduite dans l'équation (t) :

$$U = V - \frac{2m}{3m + 1}(V - W)$$

donnerait :

$$U = \frac{1}{2}(V + W)$$

qui est la formule de Dubuat.

Déterminons encore à quelle distance R′ du centre se trouverait le tuyau liquide infiniment mince possédant la vitesse moyenne. L'on pourrait arriver directement à cette valeur au moyen de l'équation (u) qui donne la parabole des vitesses ; mais il est aisé de l'obtenir par les équations déjà citées (s) et (t); en effet, la première donne pour résultat :

$$\frac{V - U}{V - W} = \left(\frac{R'}{R}\right)^{\frac{m+1}{m}}$$

lorsqu'on y fait $v = U$ et $r = R'$.

Comme la seconde peut se mettre sous la forme :

$$\frac{V - U}{V - W} = \frac{2m}{3m + 1}$$

l'on en conclut :

$$\frac{2m}{3m + 1} = \left(\frac{R'}{R}\right)^{\frac{m+1}{m}}$$

$$R' = \left(\frac{2m}{3m + 1}\right)^{\frac{m}{m+1}} R$$

$$\frac{R'}{R} = \left(\frac{2m}{3m + 1}\right)^{\frac{m}{m+1}}$$

Si $m = 1$, le rapport $\frac{R'}{R} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ou 0,707. Nous verrons que la valeur de ce rapport change très-peu, quelle que soit celle que l'on donne à m ; l'influence de l'exposant se fait donc sentir spécialement sur la grandeur de la vitesse moyenne.

6° *Dupuit.*

Cet éminent ingénieur a exposé le premier, d'une façon claire et rationnelle, la différence radicale qui existe entre les composantes de la viscosité, autant pour ce qui concerne la nature que pour ce qui se rapporte à la détermination mathématique et mécanique de la mesure de ces deux forces. Aussi profond que logique dans ses critiques et ses conclusions, M. Dupuit a rendu d'importants services à l'hy-

draulique, par son admirable ouvrage sur le mouvement des eaux courantes. S'il n'est pas arrivé, dans sa méthode, à l'expression rigoureuse des phénomènes de la nature, il faut lui rendre le juste hommage que mérite une théorie logiquement déduite de l'expérience et des lois mathématiques et mécaniques qui régissent les forces de quelque nature qu'elles soient. Du reste, les formules de Dupuit donnent déjà des approximations qui sont en général très-suffisantes pour la pratique ; et quant à la confiance que l'auteur leur accorde, elle se résume tout entière dans ces quelques lignes, extraites de son avant-propos (1), et bien faites pour légitimer encore, si cela était nécessaire, l'admiration et l'estime respectueuse que mérite cet illustre ingénieur.

« L'on a commis une étrange confusion, dit-il, en cherchant, « comme l'a fait Eytelwein, à déterminer la valeur des coeffi- « cients α et β au moyen d'expériences variées, dans lesquelles ils « devaient avoir des valeurs très-différentes. Il suit de là que la plus « grande incertitude règne sur la valeur des coefficients qu'on em- « ploie, et qu'il ne faut accorder aux résultats de la formule de « M. De Prony qu'une confiance très-limitée. Toute cette partie de « l'hydraulique est donc à refondre sous le rapport *expérimental*..... « En attendant qu'un pareil travail ait été fait (2), les formules ra- « tionnelles que j'ai établies, pour le mouvement uniforme, peuvent « servir à apprécier les circonstances où les anciennes formules sont « plus ou moins exactes, et indiquer les limites des erreurs pos- « sibles. . . . . .

« Dans le mouvement varié, comme il est impossible, même pour « un canal régulier, de déterminer la vitesse de chacun des filets, « seulement d'une manière approximative, toute solution qui repo- « sera sur la différence de force vive de deux sections sera nécessai- « rement erronée. Il ne faut donc s'attendre à quelque exactitude « dans l'application de la formule du mouvement varié que dans le « cas où les sections seront assez éloignées. . . . . .

« Quant aux phénomènes du mouvement varié dans un canal irré-

(1) J. Dupuit, ingénieur en chef, *Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes*. Paris, 1848.

(2) Les précieuses expériences récentes de M. D'Arcy semblent avoir réalisé le programme de M. Dupuit.

« gulier, c'est-à-dire, aux remous produits par des étranglements et « élargissements naturels ou artificiels, la science est encore si incer- « taine en ce qui concerne la connaissance des forces retardatrices « qui se manifestent dans les canaux réguliers, qu'il faut bien avouer « son impuissance absolue à révéler ce qui se passe dans le pêle-mêle « confus de tous les filets, au passage d'un étranglement brusque. « Cette question est d'autant plus en arrière qu'on la croyait complé- « tement résolue. . . . . .

« Il ne faudrait pas conclure des nombreuses lacunes que nous « avons signalées, dans nos études sur le mouvement des eaux cou- « rantes, que les notions vagues qu'on possède maintenant, que les « nouvelles formules proposées pour les compléter ne peuvent être « d'aucune utilité pour la pratique, et, qu'à cause de l'incertitude des « données, on peut demander aux caprices de l'imagination, ou à une « routine aveugle, des résultats que le calcul ne peut fournir avec « exactitude. La pratique n'a presque jamais besoin d'un résultat « précis; il suffit ordinairement de savoir que le produit de tel cours « d'eau est au moins ou au plus de tel volume, que le tirant que peut « espérer la navigation sera au moins de telle hauteur, que les crues « ne dépasseront pas telle limite, que la vitesse ne sera pas telle « qu'elle puisse entraîner tel terrain, tel ouvrage. Dans ces circon- « stances, les considérations que nous avons exposées, les données « expérimentales que nous avons rappelées peuvent fournir une solu- « tion suffisante et même *servir à apprécier la distance qui les sé- « pare de la solution exacte*. Enfin, dans d'autres circonstances, « l'homme pratique n'y trouvera peut-être que la conviction de son « ignorance, et cela suffira pour éviter ces grandes erreurs, ces fautes « irréparables qui n'ont jamais pour cause ce qu'on ignore d'une « science, mais bien ce qu'on croit en savoir. »

Suivant Dupuit, les deux composantes de la viscosité ont pour propriétés communes 1° d'être proportionnelles aux surfaces en contact; 2° d'être indépendantes de la pression; 3° de croître, pour l'adhérence, avec la vitesse absolue ; et, pour la cohésion, avec le rapport entre la vitesse relative des couches et leur épaisseur.

Il en résulte que ces résistances se distinguent complétement du frottement des solides les uns sur les autres, qui ne dépend ni de la

vitesse, ni de la superficie du contact, et croît au contraire avec la pression. Cependant, ajoute l'auteur, *l'adhérence* du liquide au solide est une *force de même ordre et comparable au frottement ordinaire.* Quant à la cohésion des molécules entre elles, c'est une espèce d'affinité chimique d'un ordre complétement différent et qui agit avec une intensité incomparablement plus grande que l'adhérence. Celle-ci peut être expérimentée sous une vitesse finie quelconque; l'effort nécessaire au glissement est, il est vrai, très-faible pour l'eau, puisque, pour une vitesse de 1^m par seconde, il n'atteindrait que 360 grammes par mètre carré de contact, et avec une hauteur de couche indéterminée; mais, quelque minime que soit cet effort, il est cependant appréciable, et on peut le comparer, soit avec la pression, soit avec le frottement des solides. Au bout d'une seconde, l'adhérence aura décrit un espace fini, la couche liquide aura parcouru 1 mètre sur la paroi, et l'on aura, comme quantité de travail nécessaire, celle qui serait produite par un poids de 360 grammes tombant d'un mètre de hauteur. Mais la résistance engendrée par la cohésion est une force d'un ordre bien différent; elle ne peut être expérimentée que sous une vitesse infiniment petite. Si l'on suppose, en effet, que l'on fasse glisser sur une surface d'eau immobile, et avec la même vitesse de 1^m, la colonne liquide dont il vient d'être question, la couche d'eau mobile n'aura parcouru, sur la surface au repos, que quelques distances moléculaires, dont les longueurs cumulées, si nombreuses qu'elles soient, ne pourront produire une longueur finie, comme un mètre, la vitesse relative étant toujours infiniment faible et ne pouvant être mesurée que par des unités infiniment petites. L'éminent ingénieur conclut, avec raison, que l'adhérence et la cohésion n'étant ni de même ordre ni comparables entre elles, il est impossible de les supposer dans des conditions telles, qu'on puisse leur appliquer une mesure commune.

Déjà Navier avait admis cette différence mathématique; mais, ainsi que nous l'avons vu, une seule et même hypothèse sert chez lui de base aux formules qui les représentent : celle de la proportionnalité des deux résistances aux vitesses avec lesquelles les molécules s'éloignent ou se rapprochent.

Dupuit adopte l'expression $\varepsilon \frac{dv}{dz}$ trouvée par Navier pour la cohé-

sion. Pour l'adhérence, il pose en principe que, dans les limites de la pratique, elle est *à peu près proportionnelle au carré de la vitesse ;* que, cependant, elle est représentée plus exactement par la relation suivante :

$$Hi = aW + bW^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Ou bien :

$$\frac{\Omega}{\chi} i = aW + bW^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Ou, plus rigoureusement encore :

$$\frac{\Omega}{\chi} i = C + aW + bW^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Car, dit-il, si l'expérience prouve que Hi est sensiblement nul quand W est très-petit, il n'est pas rigoureusement vrai d'en conclure que l'on a le droit absolu de supprimer le terme constant dans le développement de la fonction de W, *puisqu'un plan incliné reste mouillé après l'écoulement.*

Nous sommes d'accord avec l'auteur, quant à l'influence insignifiante du terme constant C ; mais son explication nous paraît d'autant moins admissible qu'il ajoute autre part : « Si une paroi sur laquelle « l'eau a coulé reste mouillée, cela tient à ce que nécessairement « l'écoulement s'y est terminé dans un moment où l'épaisseur H était « *sensiblement* nulle, car la nature des choses s'oppose à ce qu'un « écoulement d'une hauteur finie puisse être interrompu brusque- « ment. » Il y a là implicitement une contradiction évidente.

Les signes employés par Dupuit ont les mêmes significations que celles qui leur ont été attribuées jusqu'ici ; ainsi H, L, i sont encore liés par la relation :

$$i = \frac{H}{L}$$

c'est-à-dire que l'angle d'inclinaison i représente aussi la charge ou la différence de niveau entre les bassins, divisée par la longueur du tuyau, en vertu de laquelle le mouvement uniforme est établi.

C'est en partant des considérations précédentes que Dupuit a tenté de remplacer les formules empiriques de ses prédécesseurs par des formules rationnelles fondées sur les propriétés réelles des deux résistances si distinctes produites par la viscosité.

Admettons d'abord avec lui, momentanément, que la section d'écou-

lement soit un rectangle de largeur indéfinie, ou de parois latérales sans frottement, tel que l'avait supposé De Prony. La vitesse W représentera donc celle du fond seulement. Voici comment le savant et logique mathématicien établit sa théorie et ses formules :

Équation de la courbe des vitesses (1).

La relation entre la vitesse v d'un filet et sa profondeur z peut s'exprimer de deux manières.

Si l'on considère un plan quelconque, situé à une profondeur z, l'on trouve qu'il doit y avoir équilibre, sur ce plan, entre la pesanteur qui agit sur toutes les couches supérieures avec une intensité proportionnelle à iz, et la résistance sur ce plan qui est $-\varepsilon\frac{dv}{dz}$; ce qui donne :

$$iz = -\varepsilon\frac{dv}{dz} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (m')$$

Si l'on considère, d'un autre côté, une seule couche d'épaisseur dz, l'on trouve qu'il y a équilibre entre :

1° La pesanteur, qui agit avec une intensité proportionnelle à . . . . . idz

2° La cohésion avec le filet supérieur qui agit dans le même sens que la pesanteur, avec une intensité proportionnelle à . . . . . $-\varepsilon\frac{dv}{dz}$

3° La cohésion avec le filet inférieur, qui agit en sens contraire de la pesanteur, avec une intensité proportionnelle à. . . . . $-\varepsilon\frac{d(v+dv)}{dz}$

Et par suite, l'on peut poser :

$$idz - \varepsilon\frac{dv}{dz} = -\varepsilon\frac{d(v+dv)}{dz}$$

$$i = -\varepsilon\frac{d^2v}{dz^2}$$

qui n'est rien autre que la dérivée de la relation (m').

(1) J. Dupuit, *Études sur les eaux courantes*. 1848, chap. I, p. 25 et suivantes.

Prenant ensuite, dans le plan ZAX, parallèle au courant (fig. 20), des ordonnées v, proportionnelles aux vitesses, leurs extrémités m, b, b', n, détermineront une courbe qui sera représentée par les équations différentielles précédentes.

L'intégration donne :

$$v = C - \frac{i}{3\varepsilon} z^2 \text{ ..... } (n')$$

La constante s'obtient par la condition que $v = W$ vitesse du fond, pour $z = H$; d'où :

$$v = W + \frac{i}{3\varepsilon} (H^2 - z^2) \text{ ..... } (p')$$

W étant donné par l'équation :

$$Hi = aW + bW^2 + \text{ .....}$$

Si l'on connaît, au contraire, V la vitesse à la surface, l'équation (n') devient :

$$v = V - \frac{i}{2\varepsilon} z^2 \text{ ..... } (q')$$

Lorsqu'on connaît V et W, l'on obtient, par l'élimination de ε entre (n') et (p') :

$$v = V - \frac{V - W}{H^2} z^2 \text{ ..... } (r')$$

Cette équation est analogue à celle que nous avons obtenue en (u), lorsque nous avons fait $m = 1$ dans l'équation (s). La courbe qu'elle représente est encore une *parabole du second degré*, dont la ligne de la surface naturelle du courant serait l'axe.

Voici maintenant comment les résultats que nous venons d'obtenir se modifient dans une autre section.

Dans un tuyau cylindrique, un des cylindres liquides concentriques quelconque, dont le rayon est r, a pour équation d'équilibre :

$$\pi r^2 i = 2\pi r \times - \varepsilon \frac{dv}{dr}$$

car il éprouve de la part de la pesanteur une force accélératrice proportionnelle à $\pi r^2 i$, et de la part de la couche contiguë extérieurement, ou de la cohésion, une force retardatrice proportionnelle à son contour et à sa vitesse relative. L'on en conclut :

$$\frac{dv}{dr} = - \frac{i}{2\varepsilon} r \text{ ou bien : } ir = - 2\varepsilon \frac{dv}{dr}$$

équation tout à fait semblable à celle que nous avons obtenue en (m') pour un rectangle indéfini, sauf à changer ε en $\frac{1}{2}\varepsilon$, ou i en $\frac{1}{2}i$.

Si W est encore la vitesse à la paroi, V celle dans l'axe, et R le rayon du tuyau cylindrique, les équations (p'), (q') et (r') deviennent ici :

$$v = V - \frac{i}{4\varepsilon} r^2 \text{ ..... } (p'')$$

$$v = W + \frac{i}{4\varepsilon}(R^2 - r^2) \text{ ..... } (q'')$$

$$v = V - \frac{V - W}{R^2} r^2 \text{ ..... } (r'')$$

et chacune d'elles peut servir à déterminer la *courbe des vitesses.*

L'on peut déduire de ces relations que, lorsque le diamètre 2R change, la courbe ne change pas et ne fait que se prolonger jusqu'à la nouvelle paroi du tuyau ; quant à l'influence de l'angle d'inclinaison i ou des rapports $\frac{H}{L}$, elle se borne à modifier le paramètre.

Recherche de la vitesse moyenne.

De ce qu'il y a similitude dans les courbes de vitesses du rectangle et du cercle, il serait inexact de conclure que la *vitesse moyenne* est donnée par une même formule pour les deux sections. L'on conçoit, en effet, que les couches cylindriques d'épaisseur dr n'étant pas égales en surface, comme cela se présente pour le rectangle, il doit en résulter que la couche animée de la vitesse moyenne se trouve plus près de la paroi dans le tuyau cylindrique que dans le canal rectangulaire.

Par suite, pour déterminer la vitesse moyenne de la section, l'on posera :

$$\Omega U = \int_0^R v \times 2\pi r dr$$

ou bien :

$$\pi R^2 U = \int_0^R \left(V - \frac{V - W}{R^2} r^2\right) 2\pi r dr$$

et, en intégrant :

$$U = \frac{W + V}{2}$$

Relation qui n'est rien autre que la formule de Dubuat, ou celle que l'on obtient en faisant $m = 1$ dans l'équation (t).

Quant à la distance de cette couche cylindrique à l'axe, il suffit, pour l'obtenir, de faire $v = \frac{W + V}{2}$ dans l'équation (r'') de la courbe; de là :

$$r = \frac{1}{2} R \sqrt{2} = 0,707 R$$

comme nous l'avons déjà trouvé en traitant de la théorie de Navier.

Équations générales pour les tuyaux cylindriques ou quelconques.

Les équations qui doivent servir à déterminer les quantités W, V, U, R et i, en fonction de deux d'entre elles, sont les suivantes :

$$\frac{1}{2} Ri = aW + bW^2$$

$$V = W + \frac{R^2 i}{4\varepsilon}$$

$$U = W + \frac{R^2 i}{8\varepsilon}$$

Ces équations étant applicables, d'après Dupuit, au demi-cylindre comme à la conduite entière, l'on pourrait observer dès lors, à la surface du demi-cylindre liquide, la forme de la courbe des vitesses, c'est-à-dire mesurer V, ce qui serait bien plus facile que de le chercher à l'intérieur. Remarquons ici que, d'après la deuxième équation, le coefficient ε, qui représente l'énergie de la *cohésion*, est *proportionnel au carré du rayon*, ou à la section.

Lorsque la section est quelconque, les équations précédentes subissent des modifications. Désignant par W' la vitesse moyenne à la paroi, et par μ l'angle, ordinairement très-petit, de la verticale de profondeur maxima avec la normale sur le fond, Dupuit arrive aux *équations générales :*

$$\frac{\Omega}{\chi} i = aW' + bW'^2 + \ldots\ldots\ldots$$

$$V = W' + \frac{i}{2\varepsilon} \cdot \frac{\Omega}{\chi} R \cos. \mu = W' + \frac{i}{2\varepsilon} \cdot \frac{\Omega}{\chi} \cdot P$$

$$U = \frac{V + W'}{2} = W' + \frac{i}{4\varepsilon} \cdot \frac{\Omega}{\chi} R \cos. \mu = W' + \frac{i}{4\varepsilon} \cdot \frac{\Omega}{\chi} \cdot P$$

dans lesquelles P exprime la profondeur. Ces relations donneraient les formules des conduites cylindriques si l'on y faisait $\Omega = \pi R^2$ et $\chi = 2\pi R$, car pour un cercle R cos. $\mu = R$ puisque μ devient nul.

Si l'on élimine V entre les trois équations générales ci-dessus, il reste les deux formules :

$$U = W' + \frac{i}{4\varepsilon} \cdot \frac{\Omega}{\chi} \cdot P$$

$$\frac{\Omega}{\chi} i = aW' + bW'^2 \text{ ..... } (s')$$

qui doivent, d'après Dupuit, remplacer la formule unique suivante, de D'Aubuisson, De Prony, Eytelwein, etc.

$$\frac{\Omega}{\chi} i = \alpha U + \beta U^2 \text{ ..... } (t')$$

A ce sujet, l'éminent géomètre démontre, avec sa logique ordinaire, l'impossibilité mathématique de remplacer F (W) par F (U), ou (s') par (t').

Pour que cette substitution fût permise, dit-il, il faudrait que le rapport $\frac{W'}{U}$ fût constant. En effet, l'équation *exacte* (s') peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\Omega}{\chi} i = \frac{W'}{U} aU + \frac{W'^2}{U^2} bU^2$$

et si l'on admet que $\frac{W'}{U}$ soit constant, l'on en conclut :

$$\frac{W'}{U} a = \alpha ; \frac{W'^2}{U^2} b = \beta$$

ce qui ferait retomber sur la relation (t'). Mais en réalité, le rapport $\frac{W'}{U}$ est donné par la première équation rigoureuse :

$$U = W' + \frac{i}{4\varepsilon} \cdot \frac{\Omega}{\chi} \cdot P$$

D'où :

$$\frac{W'}{U} = \frac{W'}{W' + \frac{i}{4\varepsilon} \cdot \frac{\Omega}{\chi} \cdot P}$$

Si dans cette expression l'on remplace $\frac{\Omega}{\chi} i$ par sa valeur appro-

chée bW'^2 (au lieu de $aW' + bW'^2$) dans laquelle $b = 0{,}0003855$ comme compensation, l'on obtient :

$$\frac{W'}{U} = \frac{1}{1 + \frac{b}{4\varepsilon} \cdot PW'}$$

Adoptant, d'après De Prony lui-même, la valeur :

$$b = 0{,}000348$$

et $\frac{1}{\varepsilon} > 3200$ ou au moins $= 3200$, comme l'a proposé M. Sonnet, d'après quelques expériences de Couplet que De Prony a rapportées dans ses tables, l'on arrive au résultat définitif :

$$\frac{W'}{U} = \frac{1}{1 + 0{,}28\, PW'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (v')$$

Nous reviendrons sur ce rapport au § C, en développant les diverses théories appliquées à l'écoulement dans les canaux découverts.

7° *Barré de St-Venant, Sonnet.*

Au lieu de représenter, comme De Prony, par un binôme les résultats des 51 expériences de Dubuat, Bossut et Couplet, expériences dont nous avons indiqué les défauts et les conclusions exagérées, M. Barré de St-Venant a cru pouvoir exprimer par le monôme CU^m les phénomènes réels qui se sont produits dans ces diverses observations. Il a proposé, pour m et C, les valeurs :

$$m = \frac{12}{7} \quad C = 0{,}0002955$$

Dans son Mémoire déjà cité (1), M. Sonnet s'est proposé de modifier les hypothèses et l'analyse de Navier, de façon à pouvoir, sans prétendre expliquer les phénomènes moléculaires de la viscosité, en présenter au moins les résultats avec plus d'exactitude. Ainsi que nous l'avons déjà vu, M. Sonnet élargit le principe général de Navier, en prenant, pour représenter l'action mutuelle de l'adhérence ou de la cohésion, une fonction de la vitesse relative développable suivant les

(1) *Mémoire sur le mouvement rectiligne et uniforme des eaux courantes en ayant égard aux différences de vitesse des filets.* 1845.

puissances entières de sa variable, et dont il conserve, suivant l'application, tantôt un seul, tantôt deux termes. De même que Navier, l'auteur déduit de son hypothèse, pour la cohésion, des équations aux différences partielles, qui se réduisent à une seule pour le mouvement permanent rectiligne considéré dans le mémoire; mais, pour l'adhérence, il obtient des équations différentes et qui ne sont plus linéaires; d'après lui, la relation ordinaire $av + bv^2$ ne serait qu'une formule d'interpolation, et l'adhérence serait représentée par une fonction *impaire* de la vitesse.

Appliquant ses principes à un courant rectiligne, de section circulaire, dans lequel les filets également éloignés de l'axe sont censés animés de la même vitesse, M. Sonnet trouve, par l'intégration, les mêmes résultats que Dupuit; c'est-à-dire que la courbe des vitesses est une parabole ayant pour axe celui du tuyau, et dont la convexité serait tournée dans le sens du courant. Quant à la vitesse moyenne, elle est encore une moyenne arithmétique entre V et W, distante de l'axe d'environ les $\frac{7}{10}$ du rayon R.

Afin de déterminer la vitesse moyenne en fonction de W seulement, l'auteur adopte deux termes $aW + bW^2$ pour la fonction qui représente l'adhérence; en se servant des équations intégrales données par son analyse, il obtient les deux formules :

$$aW + bW^2 = \frac{1}{2} Ri \quad \text{et} \quad U = W + \frac{\Delta R^2 i}{8\varepsilon}$$

qui contiennent trois coefficients constants a, b, $\frac{1}{\varepsilon}$, dont les valeurs doivent être spécialement déterminées pour chaque série d'expériences en faisant usage de la *méthode des moindres carrés*.

Ayant appliqué les formules précédentes aux expériences de Couplet sur les conduites de Versailles, M. Sonnet a trouvé qu'elles y satisfont mieux que celles d'Eytelwein. Ainsi, prenant $a = 0{,}0000194$; $b = 0{,}00037$; et $\frac{1}{\varepsilon} = 5{,}200$, les erreurs proportionnelles données par les formules en question n'atteignent pas $\frac{1}{34}$, tandis que par celles d'Eytelwein, elles s'élèvent à plus de $\frac{1}{12}$.

L'auteur a essayé aussi de représenter par ses formules les résultats des 44 expériences de Bossut et de Dubuat. Il a trouvé qu'il suffisait d'y faire :

$$a = 0{,}000024 \text{ et } b = 0{,}000286$$

valeurs trouvées encore par la méthode des moindres carrés.

Nous n'insisterons pas davantage sur la théorie de M. Sonnet ; quant à ses conclusions, nous venons de voir qu'elles concordent généralement avec celles de Dupuit. Avant de terminer, nous croyons utile de faire connaître, en peu de mots, la méthode dite des moindres carrés, dont on a si souvent fait usage.

Après avoir fait un certain nombre d'expériences auxquelles l'on est censé accorder une confiance égale, il s'agit de satisfaire le mieux possible à leurs résultats, au moyen d'un binôme de la forme $\alpha U + \beta U^2$. Tel serait le cas pour la formule :

$$\frac{1}{2} Ri = aW + bW^2$$

Les valeurs de a et de b ne pouvant probablement pas satisfaire rigoureusement à toutes les expériences, l'erreur *absolue* sera pour l'une d'elles :

$$\frac{1}{2} Ri - (aW + bW^2)$$

et l'erreur *relative* :

$$1 - \frac{2(aW + bW^2)}{Ri}$$

Or, il résulte d'une démonstration de *Laplace* que, pour réduire au minimum l'erreur relative moyenne à craindre, il faut donner à b et a des valeurs telles que la *somme des carrés des erreurs relatives soit la plus petite possible.*

Par suite, si l'on fait :

$$\Sigma \left[1 - \frac{2(aW + bW^2)}{Ri}\right]^2 = Z$$

les conditions du minimum seront données en posant :

$$\frac{dZ}{da} = o \qquad \frac{dZ}{db} = o$$

ou bien :

$$\Sigma\left[1-\frac{2(aW+bW^2)}{Ri}\right]\frac{W}{Ri}=o$$

$$\Sigma\left[1-\frac{2(aW+bW^2)}{Ri}\right]\frac{W^2}{Ri}=o$$

ou bien encore :

$$a\Sigma\frac{W^2}{R^2i^2}+b\Sigma\frac{W^3}{R^2i^2}=\frac{1}{2}\Sigma\frac{W}{Ri}$$

$$a\Sigma\frac{W^3}{R^2i^2}+b\Sigma\frac{W^4}{R^2i^2}=\frac{1}{2}\Sigma\frac{W^2}{Ri}$$

équations du premier degré, à 2 inconnues a et b, dont les six sommes sont parfois assez longues à calculer quand le nombre d'expériences est considérable. Du reste, ce procédé n'est pas très-rigoureux, car il s'appuie sur l'hypothèse d'une égale exactitude dans toutes les observations de la série.

8° *D'Arcy.*

Avant que M. D'Arcy eût fait connaître ses importantes et précieuses recherches expérimentales sur l'écoulement de l'eau dans les tuyaux, quelques savants, tels que Dupuit, Tadini, etc., avaient déjà proposé de représenter l'adhésion par un monôme de la forme CU^2; mais cette simplification n'était point généralement admise à cause du doute provenant de la pénurie d'expériences comparatives. Aujourd'hui, cette importante question semble tranchée par les observations de M. D'Arcy, quoique ces dernières n'aient pas toujours rigoureusement autorisé les déductions qu'on en a tirées.

Ainsi que nous l'avons vu, cet éminent ingénieur a reconnu, par expérience, que la cohésion, rapportée à l'unité de surface, pour chaque élément de surface commun à deux couches liquides contiguës, est proportionnelle à l'expression $\varepsilon\left(\frac{dv}{dr}\right)^2$. Il paraîtrait, d'après ses observations, que le coefficient ε de proportionnalité, qui mesure l'énergie de la cohésion, serait variable d'un liquide à l'autre, ce qui est tout naturel, et qu'en outre il varierait suivant le rayon R de la conduite de façon à croître avec la deuxième puissance de ce dernier.

Contrairement à l'opinion de M. Bresse, cette influence de R^2, ou

de la section $\Omega = \pi R^2$ n'a rien qui doive surprendre. En effet, l'on conçoit tout d'abord que la valeur de la cohésion croît plus rapidement que l'adhérence lorsque le calibre augmente, la première se produisant sur le volume et la seconde sur la surface. D'un autre côté, si l'on se reporte à la deuxième des 3 équations générales posées par Dupuit, pour les tuyaux cylindriques, l'on en tire :

$$\varepsilon = R^2 \frac{i}{4(V - W)}$$

qui donne la même proportionnalité. L'on peut donc en conclure que les observations de M. D'Arcy n'ont fait que confirmer un fait que Dupuit avait déjà théoriquement démontré.

Voici, en résumé, les conclusions expérimentales de l'auteur, sur l'écoulement de l'eau dans les conduites cylindriques simples, à débit constant et rectilignes :

1° Lorsqu'il s'agit de tuyaux neufs, le frottement (notre adhérence) de l'eau contre les parois varie *considérablement* avec la nature et le poli des surfaces.

2° La nature de la surface tend à perdre son influence à mesure que les tuyaux se recouvrent d'une couche de dépôts amenés par l'eau elle-même; et, cette circonstance, pour la fonte, engendre un frottement deux fois plus grand que lorsque le tuyau était neuf.

Nous croyons devoir faire remarquer ici, avec M. Bresse, le peu de rigueur de cette conclusion (1). En réalité, M. D'Arcy a déterminé ses coefficients a et b au moyen de tuyaux en fonte neuve; il a ensuite admis que l'existence de dépôts dans les conduites d'une nature quelconque doit simplement faire doubler ces coefficients.

Il ajoute, comme développements :

3° Le frottement (ou plutôt l'adhérence), par unité de surface, peut être représenté par :

$$\Delta (aU + bU^2) = F(U)$$

U étant la vitesse moyenne; mais, pour les tuyaux qui ont quelque temps d'usage, l'on peut se contenter du monôme :

$$\Delta b_1 U^2 = F(U)$$

le nombre b_1, variant seulement avec le rayon R du tuyau; tandis que

(1) M. Bresse, *Cours de mécanique appliquée.* (*Hydraulique.*) 1860, p. 123.

a et b, tout en étant variables avec R, dépendraient encore de la nature des surfaces pour les conduites neuves.

Ce troisième principe de M. D'Arcy, admis ultérieurement par M. Bresse, laisse aussi à désirer sous le rapport de l'exactitude, en ce qu'il suppose implicitement que l'on puisse représenter par une fonction F de la vitesse moyenne U la force retardatrice de l'adhérence, qui est réellement F (W), par unité de surface. Cette hypothèse, nous le répétons, ne deviendrait légitime que si U était déterminé pour une certaine valeur de W; mais il n'en est pas ainsi : à une seule valeur de W peuvent correspondre diverses valeurs de U suivant la grandeur des autres variables R et $\frac{\theta}{L}$, ainsi que l'on peut s'en assurer plus haut, par l'élimination de V entre les équations (r) et (t).

4° Pour les conduites déjà vieilles ou chargées de dépôts, les constantes a, b, b_1, doivent être calculées comme suit :

$$a = 0{,}000032 + \frac{0{,}000\,000\,00376}{R^2}$$

$$b = 0{,}000443 + \frac{0{,}000\,0062}{R}$$

$$b_1 = 0{,}000507 + \frac{0{,}000\,00647}{R}$$

Pour des tuyaux en fonte neuve les nombres a et b devraient être diminués de moitié.

Il est encore une observation importante à faire sur ce quatrième principe de la théorie de M. D'Arcy : c'est que b_1, et par suite la résistance due à l'adhérence aux parois est plus considérable dans les petits tuyaux que dans ceux d'un calibre supérieur; les variations sont, il est vrai, très-faibles, puisque la valeur moyenne de b_1 est 0,000625 pour des diamètres compris entre 0^m06 et 1^m00.

c. Résolution d'équations générales et de cas particuliers.

Si, dans l'équation (o) trouvée au § B. a, l'on remplace R par $\frac{D}{2}$, l'on obtient :

$$\frac{1}{4} D \frac{\theta}{L} = \frac{1}{\Delta} F (U) \text{ ..... } (A)$$

dans laquelle θ représente la charge entre les sections extrêmes, ou bien encore la perte de charge dans cet intervalle, puisque la vitesse de chaque molécule est constante.

Soit aussi : Q le débit qui a lieu, en une seconde, par une section transversale quelconque; U la vitesse moyenne, également invariable pour toutes les sections puisqu'elle est donnée par le quotient constant $\frac{Q}{\frac{1}{4}\pi D^2}$ tiré de l'identité :

$$Q = \frac{1}{4}\pi D^2 U \text{ ..... (B)}$$

Enfin, soit : i le rapport $\frac{\theta}{L}$, c'est-à-dire la charge ou perte de charge par mètre courant de conduite.

L'équation (A) devient :

$$\frac{1}{4} Di = \frac{1}{\Delta} F(U) \text{ ..... (C)}$$

qui n'est rien autre que la première des 3 équations générales de Dupuit, pour les sections circulaires, ou :

$$\frac{1}{2} Ri = aW + bW^2 = b_1 W^2$$

La formule (C) permet de résoudre tous les problèmes de l'écoulement, lorsque deux des quantités D, U, Q et i sont connues, car il n'y a, en réalité, que trois indéterminées, les quantités U, Q, D étant, en outre, liées par la relation (B). L'on peut classer ces problèmes comme suit :

1°	Étant donné	D, i,	trouver	U, Q.
2°	»	Q, i,	»	U, D.
3°	»	D, U,	»	Q, i,
4°	»	D, Q,	»	U, i.
5°	»	U, i,	»	Q, D.
6°	»	U, Q,	»	D, i.

Le plus souvent, en pratique, U n'est qu'une inconnue auxiliaire; lorsqu'on a la dépense Q, l'on n'a guère besoin de calculer la vitesse moyenne.

Des six problèmes précités, les deux premiers sont les seuls inté-

ressants, parce qu'ils se présentent à tout instant. Les quatre derniers sont, du reste, les plus faciles à résoudre, la relation (B) réduisant le calcul à celui d'une seule inconnue qui est donnée alors directement par la formule (C).

Lorsque les problèmes se rapportent à des conduites déterminées de position, et qu'il s'agisse, par exemple, de l'un des deux premiers cas, l'on peut connaître i expérimentalement au moyen de piézomètres, placés en divers points, qui donneront la charge totale θ entre ceux-ci, et, par suite, la charge $\frac{\theta}{L}$ par mètre courant; U sera mesuré en faisant écouler le liquide pendant un temps t, ce qui donnera Qt, donc aussi la dépense Q par seconde, et en prenant alors la relation :

$$U = \frac{4\,Q}{\pi D^2}$$

Quant à F (U), nous adopterons, suivant M. D'Arcy, la relation générale :

$$\frac{1}{\Delta} F(U) = b_1 U^2 = \left(0{,}000507 + \frac{0{,}00001294}{D}\right) U^2$$

Quoique les calculs n'offrent aucune difficulté, nous croyons devoir traiter l'un des six problèmes, afin de faire comprendre l'utilité que peuvent présenter certaines tables, fréquemment employées pour faciliter et réduire les opérations.

Prenons le premier; il peut s'exprimer ainsi : *Connaissant le diamètre d'une conduite, ainsi que la charge par mètre courant, trouver la vitesse* U *et la dépense.*

La formule (C) donne :

$$\frac{1}{4} Di = \frac{1}{\Delta} F(U) = b_1 U^2 = \left(0{,}000507 + \frac{0{,}00001294}{D}\right) U^2$$

D'où :

$$U = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Di}{0{,}000507 + \frac{0{,}00001294}{D}}}$$

$$U = 22{,}20\, D \sqrt{\frac{i}{D + 0{,}0255}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(D)}$$

Si l'on prenait pour b_1 la moyenne $0,000625 = (0,025)^2$, l'on obtiendrait :

$$U = 20\sqrt{Di} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (E)$$

Introduisant la valeur calculée de U dans la relation (B), l'on en conclut Q ou la dépense.

La moyenne $b_1 = 0,000625$ correspond à une conduite de diamètre $D' = 0^m11$; pour $D < D'$ ou $< 0^m11$, l'on a : $U < 20\sqrt{Di}$. L'erreur relative sur U est d'environ 7 pour cent lorsque $D = 0,06$, et 9 pour cent lorsqu'il atteint 1^m00, dans l'hypothèse où l'on adopterait toujours pour b_1 la moyenne en question.

La résistance $\frac{1}{\Delta}$ F (U) étant, d'après De Prony et Eytelwein, une fonction de U seulement, ces auteurs ont établi des tables, dites *à simple entrée*, indiquant les valeurs de $\frac{1}{\Delta}$ F (U) pour une série de valeurs de U considérée comme la variable. Dès lors le calcul de U, que l'on devrait faire comme plus haut, sauf à remplacer F (U) par $\alpha U + \beta U^2$, ne serait plus du tout nécessaire : il suffirait de faire le produit $\frac{1}{4}$ Di, et de chercher le nombre égal à ce produit dans la colonne $\frac{1}{\Delta}$ F (U); en regard se trouverait la valeur de U.

Comme F (U) est, d'après nos conclusions, une fonction de U et de D, il faudrait, pour suivre une marche analogue, posséder une table à double entrée, c'est-à-dire à deux arguments ou variables ; ou bien, une série de tables simples, comme celles de De Prony, dont chacune serait relative à un diamètre particulier; et l'on prendrait alors, pour chaque problème, celle qui conviendrait au diamètre D donné.

Une table de ce genre a été construite par M. Bresse, d'après les données expérimentales de M. D'Arcy que nous avons développées. Elle est rapportée à la fin du Cours remarquable d'hydraulique professé par ce savant ingénieur à l'École des ponts et chaussées de France. En regard du diamètre D, il a inscrit les valeurs correspondantes de l'aire $\frac{1}{4}\pi D^2$, du coefficient b, du rapport $\frac{i}{Q^2}$; et du loga-

rithme de $\frac{i}{Q^2}$; il a formé ainsi une table à simple entrée, les quantités précédentes n'étant réellement fonction que de la seule variable D; en effet, si l'on élimine U entre les relations :

$$\frac{1}{4} Di = \frac{1}{\Delta} F(U) \text{ et } \frac{1}{4} Di = \left(0{,}000507 + \frac{0{,}00001294}{D}\right) U^2$$

l'on obtient :

$$\frac{i}{Q^2} = \frac{64}{\pi^2 D^5} \left(0{,}000507 + \frac{0{,}00001294}{D}\right)$$

Ainsi, lorsque D et i seront les données du problème, l'on trouvera d'abord par la table $\frac{i}{Q^2}$, soit directement, soit par son logarithme. Ayant la valeur de $\frac{i}{Q^2} = N$ par exemple, l'on déduira Q de la relation :

$$\frac{i}{Q^2} = N \text{ d'où } Q = \sqrt{\frac{i}{N}}$$

Si l'on voulait connaître aussi la vitesse U, l'on emploierait la relation (B).

M. D'Arcy a également construit une table à double entrée, qui fait connaître i et Q en fonction des arguments D et U. Mais elle est incomplète en ce qu'elle ne fournit que par tâtonnement les quantités D et U, lorsque i et Q sont les données immédiates du problème.

II. *Mouvement permanent varié ; conduites simples, à diamètre ou à débit variable.*

a. Les variations de diamètre et de débit n'étant pas continues.

Nous avons vu que, dans le mouvement uniforme, la vitesse d'une molécule quelconque est constante sur tout le parcours de la conduite, et que toutes les sections présentent la même courbe de vitesses. Or, ces faits ne se réaliseront plus si la section transversale du tuyau varie d'un point à l'autre du profil en long; ou bien si, à une section constante, correspondent des pentes variables. Enfin, le mouvement cessera encore d'être uniforme quand il se produira un débit variable, par le fait d'orifices, ou de tuyaux secondaires, existant en certains points du parcours de la conduite principale.

Supposons qu'une conduite, recevant l'eau d'un bassin M (fig. 47), soit composée d'une série de parties AD, DH, HL, etc., de diamètres différents, et percées d'orifices ou de tuyaux secondaires en des points B, C, E, F, G, K. Admettons d'abord que les portions AB, DE, HK, soient assez courtes pour que l'on ne puisse négliger l'action produite par le rétrécissement ou l'élargissement brusque de la conduite; exprimons par :

D, D_1, D_2,..... les diamètres des tuyaux AD, DH, HL;

h, h_1, h_2, h_3,..... les distances verticales mesurées en descendant, entre le plan de niveau du bassin et les sommets des colonnes piézométriques élevées en B, C, E, F..... ces sommets étant soumis, comme le niveau du bassin, à la pression atmosphérique; d'où $p = p'$;

U, U_1, U_2, U_3,..... les vitesses moyennes dans les parties AB, BC, CD, DE, etc.;

L, L_1, L_2, L_3,..... les longueurs AB, BC, CD, DE, etc.

Il s'agit d'établir l'équation générale de l'écoulement, c'est-à-dire une relation entre les niveaux piézométriques h, h_1, h_2, h_3,..... aux points B, C, E, etc.; les vitesses U, U_1, U_2;..... les longueurs L, L_1, L_2,..... et les diamètres D, D_1, D_2.....

Rappelons d'abord certains résultats déjà démontrés, au moyen desquels la question sera très-facile à résoudre.

D'après la conclusion trouvée en *c*, au § B du chapitre II, la perte de charge produite par un rétrécissement ou un élargissement brusque de section est égale à la hauteur représentative de la perte de vitesse moyenne. Mais il est important de se rappeler que la démonstration correspondante reposait sur l'hypothèse du parallélisme des filets dans les sections *ab* et GH (fig. 27) où étaient mesurées les vitesses. Cette hypothèse est très-admissible ici pour le calcul de la perte de charge que l'eau éprouve à son entrée A dans la conduite, les variations dans le mouvement ne commençant à se produire qu'aux approches du point B.

Désignant par θ cette première perte éprouvée, nous poserons donc, d'après le résultat du § B. *c*, du chapitre II :

$$\theta = \frac{(u - U)^2}{2g}$$

u étant la vitesse par un orifice a, percé dans un diaphragme imaginaire (fig. 29).

Désignant par σ' l'aire de cet orifice, et par S' la surface $\pi \frac{D^2}{4}$ d'une section droite du tuyau AB, nous aurons :

$$\frac{u}{U} = \frac{S'}{m\sigma'} \text{ d'où : } u = U \frac{S'}{m\sigma'}$$

Par suite :

$$\theta = \frac{U^2}{2g}\left(\frac{S'}{m\sigma'} - 1\right)^2$$

Supprimant le diaphragme fictif, pour ramener le cas de la fig. 29 à celui de la question actuelle, c'est-à-dire, posant $S = \sigma$, nous obtiendrons, en définitive :

$$\theta = \frac{U^2}{2g}\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 \quad \text{.....} \quad (F)$$

ou bien, autrement :

$$\theta = \frac{Q^2}{S'^2} \cdot \frac{1}{2g}\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2 = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{mS'} - \frac{1}{S'}\right)^2$$

Si donc nous représentons par H la charge AX, correspondant à l'hypothèse d'une perte de vitesse nulle, ou à peu près, nous aurons :

$$\frac{U^2}{2g} = H - \frac{U^2}{2g}\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2$$

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{H}{1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}$$

et par conséquent :

$$\theta = H \times \frac{\left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}$$

Si, dans cette expression, nous faisons : $m = 0{,}615$, ce qui correspond en moyenne aux orifices circulaires, nous trouvons :

$$\frac{\theta}{H} = 0{,}28$$

valeur qui diffère un peu de celle qui est donnée expérimentalement

dans les ajutages cylindriques, pour lesquels nous avons obtenu :

$$\frac{U^2}{2g} = \overline{0,82}^2\, H = \frac{2}{3}\, H$$

D'où :

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{U^2}{2g} = 0,50\, \frac{U^2}{2g}$$

La charge perdue est $\frac{1}{3}$ de la charge totale ou la moitié de la charge restante.

Nous adopterons pour θ, cette dernière valeur; il est toujours préférable, pour éviter des mécomptes, d'augmenter légèrement les résistances qui tendent à diminuer la dépense.

Lorsque la longueur L ne peut être considérée comme très-courte, il faut tenir compte d'une autre perte de charge provenant de l'action de la viscosité, entre A et B, et qui se représente par $\frac{4}{\Delta D} \cdot F(U)$, au mètre carré, ainsi qu'il a été démontré. Admettant toujours une vitesse nulle dans le réservoir, nous aurons, d'après le théorème de Bernouilli :

$$\frac{U^2}{2g} = h - 0,50\, \frac{U^2}{2g} - \frac{4L}{\Delta D} \cdot F(U)$$

$$h = \frac{3}{2} \cdot \frac{U^2}{2g} + \frac{4L}{\Delta D} \cdot F(U)$$

La viscosité étant la seule force retardatrice de B en C, nous aurons, d'après l'équation (C) du paragraphe *c* § B, la valeur de son action :

$$\frac{1}{\Delta} F(U_1) = \frac{1}{4}\, Di = \frac{h_1 - h}{L_1} \cdot \frac{D}{4}$$

D'où :

$$h_1 - h = \frac{4L_1}{\Delta D} \cdot F(U_1)$$

De C à E, nous aurons d'abord une perte de charge analogue à la précédente, et représentée par :

$$\frac{4\, L_2}{\Delta D} \cdot F(U_2) + \frac{4\, L_3}{\Delta D_1} \cdot F(U_3)$$

puis une deuxième perte produite en E par l'élargissement brusque de

section, et qui s'exprime ici, d'après le § B. *c* du chapitre II, par la relation :

$$\theta' = \frac{(U_2 - U_3)^2}{2g}$$

et le théorème de Bernouilli étant appliqué encore de C à E, nous obtiendrons :

$$\frac{U_3^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} = h_2 - h_1 - \frac{(U_2 - U_3)^2}{2g} - \frac{4\,L_2}{\Delta D} \cdot F\,(U_2) - \frac{4\,L_3}{\Delta D_1} \cdot F\,(U_3)$$

$$h_2 - h_1 = \frac{U_3^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} + \frac{(U_2 - U_3)^2}{2g} + \frac{4\,L_2}{\Delta D} \cdot F\,(U_2) + \frac{4\,L_3}{\Delta D_1} \cdot F\,(U_3)$$

Il serait facile d'exprimer ainsi, successivement, la perte de charge ou l'abaissement piézométrique $h_3 - h_2$, etc., en passant d'un orifice à l'autre en fonction des vitesses moyennes respectives.

Différents problèmes peuvent se présenter dans des circonstances analogues à celles que nous venons d'examiner. Supposons, par exemple, que les diamètres étant donnés, il s'agisse d'obtenir une certaine dépense déterminée Q, par l'orifice H, avant toute perte ultérieure, c'est-à-dire, posons :

$$\frac{1}{4}\,\pi D_3 U_7 = Q \quad \text{d'où :} \quad U_7 = \frac{4\,Q}{\pi D_3} = N$$

Il en résultera les équations suivantes :

$$\frac{U_6^2}{2g} = \frac{U_7^2}{2g} + (h_5 - h_4) = \frac{N^2}{2g} + (h_5 - h_4)$$

$$\frac{U_5^2}{2g} = \frac{U_6^2}{2g} + (h_2 - h_3)$$

Ainsi de suite, jusqu'en A, en tenant compte, comme dans l'équation générale, des diverses résistances ; nous aurons ainsi une série d'équations qui détermineront les niveaux piézométriques aux points B, C, E, etc., et par conséquent i, i', i'', etc.

Très-souvent les pentes sont données, par suite les niveaux piézométriques ; l'on se propose, dans ce cas, de calculer les diamètres de façon à ne dépenser qu'une charge déterminée $h_n - h_{n+1}$, avec un volume d'eau connu Q_m, sur chaque portion de la conduite.

Toute la théorie précédente étant basée sur l'hypothèse du parallélisme des tranches n'est qu'une approximation des phénomènes réels

du mouvement varié. Cependant elle donne des résultats suffisamment rigoureux dans la plupart des cas de la pratique, parce que, généralement, les portions de tuyaux AB, BC, CD, etc., sont assez longues pour que les pertes de charge, occasionnées par les étranglements ou les accroissements brusques de section, ainsi que les différences des hauteurs dues aux vitesses, soient négligeables devant les charges engendrées par l'adhérence, proportionnellement aux longueurs L, L_1, L_2..... En outre, comme d'ordinaire le diamètre est constant entre deux orifices consécutifs, le problème rentrera alors dans les circonstances de celui que nous avons résolu plus haut par l'équation (D) ou (E).

La question, telle que nous l'avons envisagée par la fig. 47, n'est pas tout à fait générale : ainsi, il peut arriver que les diamètres des parties AD, DH, ... varient par degrés insensibles, et qu'il en soit de même du débit, par le rapprochement excessif des orifices m, m_1, m_2,..... correspondant aux points B, C, E..... Nous supposons toujours que le mouvement soit *permanent,* c'est-à-dire que, dans une même section, les phénomènes ne changent pas avec le temps.

b. **Équation générale du mouvement permanent varié ; les variations étant continues.**

Dans de telles conditions, il est impossible, avec les connaissances actuelles, de résoudre le problème d'une façon suffisamment approximative. Quelques auteurs, il est vrai, ont admis que, dans le mouvement varié permanent par filets sensiblement parallèles, les vitesses des filets qui traversent une section quelconque varient d'un filet à l'autre, suivant les mêmes lois que lorsque le mouvement est uniforme. Nous sommes loin de partager, à cet égard, l'opinion de MM. Navier, Belanger, Bresse, etc. L'hypothèse précédente nous paraît incompatible avec les véritables phénomènes du mouvement varié; il y a même implicitement contradiction ou cercle vicieux à la formuler.

Dans le mouvement uniforme, chaque filet peut être considéré isolément; le chemin qu'il décrit est parallèle à l'axe, et il n'y a jamais mélange des molécules d'un filet avec celles des filets voisins. Il n'en

est pas ainsi dans le mouvement varié où la vitesse est différente d'une molécule à l'autre d'un même filet, soit par le fait d'un diamètre ou d'un débit variable, soit par les deux réunis. Dès lors, la vitesse variant dans un rapport quelconque, les molécules d'un même filet s'éloignent ou se rapprochent, suivant que la vitesse augmente ou diminue, et les molécules des filets voisins s'en rapprochent ou s'en éloignent dans les mêmes circonstances, le même mouvement s'opérant aussi bien dans le sens vertical que dans celui du mouvement. Il en résulte une certaine pénétration des filets entre eux, pénétration variable aussi dans une même section puisque, par la définition même du mouvement, les vitesses changent dans un rapport quelconque très-différent sur tous les points de la section. Le mouvement varié cause donc, par ces pénétrations, une perte de travail qui ne se produit pas dans le mouvement uniforme, et qui ne peut plus se mesurer par l'inclinaison des tangentes de la courbe des vitesses.

Les formules du mouvement uniforme ont été obtenues au moyen de procédés analytiques dans lesquels il n'a été tenu compte que du déplacement moléculaire qui se fait dans le sens du mouvement ; les appliquer aux phénomènes du mouvement varié, c'est faire abstraction d'un deuxième déplacement qui s'opère dans un sens perpendiculaire au premier, et par conséquent aboutir à un résultat inexact.

Malheureusement, il est impossible, dans l'état actuel de la science, d'introduire dans le calcul cette perte de travail engendrée par la pénétration. Outre la difficulté de l'évaluer, même approximativement, et de la représenter, il en résulterait, pour la pratique, des formules certainement trop compliquées. Mais cet obstacle actuel, momentané peut-être, n'exclut pas la nécessité de faire bien apprécier l'influence notable du mouvement varié sur la distribution des vitesses des filets ; s'il n'est pas possible aujourd'hui de calculer exactement cette influence, il est important de s'en rendre compte afin de l'introduire approximativement dans la probabilité d'exactitude du résultat que l'on cherche. D'ailleurs, la considération bien entendue de la résistance due à la pénétration ou à la division des filets empêchera de commettre de graves erreurs, par une fausse application des formules pratiques ordinaires du mouvement varié, ou par une confiance exagérée dans l'exactitude de leurs résultats.

Nous n'exposerons que succinctement les calculs de l'analyse adoptée par MM. Genieys, Navier, Belanger, Bresse, etc., pour établir l'équation générale du mouvement varié dans les conduites. Si l'on désigne par ds la distance qui sépare deux sections infiniment rapprochées, et par $d\theta$ l'abaissement du niveau piézométrique entre ces deux sections, le théorème de Bernouilli étant censé applicable dans ces limites, l'on obtient :

$$\frac{vdv}{g} = d\theta - \frac{1}{g}\psi \cos.\ \omega.\ ds,$$

$$\frac{vdv}{g} = d\theta - \frac{1}{g}\psi.\ ds \quad \ldots\ldots\ldots \text{(G)}$$

L'intégration donne :

$$\theta = \frac{v^2 - v_1^2}{2g} + \int_o^L \psi\ ds$$

Telle est l'équation admise pour le mouvement varié, et démontrée dans un grand nombre de traités d'hydraulique.

Revenons à l'équation différentielle (G). Le premier terme $\frac{vdv}{g}$ est la valeur moyenne de l'accroissement que prend $\frac{v^2}{2g}$ pour chacune des molécules comprises entre les sections considérées. Dans l'impossibilité de l'évaluer exactement, la théorie ordinaire admet une nouvelle approximation; elle remplace $\frac{vdv}{g}$ par la différentielle de la hauteur due à la vitesse moyenne U; de là :

$$\frac{UdU}{g} = d\theta - \frac{1}{g}\psi.\ ds$$

et ensuite :

$$\frac{UdU}{g} = d\theta - \frac{\chi}{\Delta\Omega} F(W)\ ds$$

Enfin, remplaçant F (W) du mouvement varié par F (U), et adoptant pour cette dernière la même fonction que celle du mouvement uniforme, ce que nous avons reconnu tout à fait impossible, l'on obtient :

$$\frac{UdU}{g} = d\theta - \frac{\chi}{\Delta\Omega} F(U)\ ds$$

$$d\theta = \frac{UdU}{g} + \frac{\chi}{\Delta\Omega} F(U)\ ds \quad \ldots\ldots\ldots \text{(H)}$$

Pour les tuyaux circulaires, cette équation peut se mettre sous la forme :

$$d\theta = \frac{UdU}{g} + \frac{2}{R} b_1 U^2 ds$$

$$d\theta = \frac{UdU}{g} + \frac{4}{D} b_1 U^2 ds \quad \text{.....} \quad (L)$$

en remplaçant F (U) par $\Delta b_1 U^2$, d'après D'Arcy.

Si l'on pose en outre :

$$Q = \frac{1}{4} \pi D^2 U \quad \text{.....} \quad (M)$$

l'on obtient deux relations (L) et (M) entre les quantités θ, U, D, et Q, qui sont toutes fonctions de la seule variable s. L'on pourra donc, comme plus haut, en *a*, trouver deux de ces quantités lorsque les deux autres seront données.

c. Conduites simples à diamètre variable et à débit constant.

C'est une particularité du cas précédent. Soit L la longueur AB (fig. 48) de la conduite; U et U_1 les vitesses moyennes en A et en B, pour $s = o$ et $s = L$. Si l'on suppose que le débit soit constant, et égal à Q, l'équation (L) devient par l'intégration :

$$\theta = \frac{U_1^2 - U^2}{2g} + 4 \int_o^L \frac{b_1 U^2}{D} ds$$

Afin de simplifier cette relation, l'on admet une nouvelle série d'hypothèses; ainsi, l'on néglige le terme $\frac{U_1^2 - U^2}{2g}$ parce que, dans les grandes conduites, ce terme n'est qu'une petite fraction de la charge totale θ; en second lieu les variations de b_1 étant insignifiantes quand D est $> 0^m06$, l'on remplace cette variable par une constante b_1 représentant la moyenne trouvée $(0,025)^2$. L'on donne généralement, comme excuse plausible à cette licence, l'incertitude et le défaut de précision qui règnent déjà dans l'ensemble de l'analyse employée; ce singulier argument doit contribuer à diminuer encore la faible confiance que mérite cette théorie.

Quoi qu'il en soit, nous poserons avec les auteurs précités:

$$\theta = 4b_1 \int_0^L \frac{U^2 ds}{D} = \frac{64\, b_1}{\pi^2} \int_0^L \frac{Q^2 ds}{D^5}$$

et, comme Q est constant quand s varie :

$$\theta = \frac{64\, b_1 Q^2}{\pi^2} \int_0^L \frac{ds}{D^5} = \frac{64\, b_1 Q^2}{\pi^2} \cdot \frac{L}{D^5} \quad \text{.....} \quad (N)$$

Remarquons que l'intégrale $\int_0^L \frac{ds}{D^5}$ ne dépend que des dimensions de la conduite; ainsi, quels que soient le débit et la charge (ou la pente) la valeur de cette intégrale restera constante pourvu que le rapport $\frac{L}{D^5}$ ne varie pas, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\frac{L}{D^5} = \frac{L_1}{D_1^5} = \frac{L_2}{D_2^5} = \text{.....} \frac{L_n}{D_n^5} = C$$

De là, cette loi remarquable indiquée par Dupuit :

Deux conduites simples, à débit constant, mais à diamètre variable suivant des lois quelconques, débiteront le même volume d'eau sous la même charge, et seront alors dites *équivalentes,* lorsque la *somme des produits des longueurs élémentaires qui composent chaque conduite, multipliées chacune par la cinquième puissance de l'inverse du diamètre correspondant, conserve la même valeur dans les deux conduites.*

Cas particuliers.

1° D'après l'énoncé du problème précédent, le diamètre pouvait varier suivant une loi quelconque; cette condition comprend donc aussi le cas où le diamètre serait constant sur de certaines longueurs L_1, L_2, L_3,..... c'est-à-dire celui de la fig. 47, sauf l'inconstance du débit; l'on conçoit dès lors qu'il suffirait de poser :

$$\int_0^L \frac{ds}{D^5} = \int_0^{L_1} \frac{ds}{D_1^5} + \int_0^{L_2} \frac{ds}{D_2^5} + \int_0^{L_3} \frac{ds}{D_3^5} + \text{.....}$$

L'on peut encore conclure de ce qui précède que, si la conduite a un petit diamètre sur une fraction notable de sa longueur, et un diamètre plus fort sur la longueur restante, la dépense sous une charge déterminée sera peu supérieure à celle que l'on obtiendrait si le petit diamètre s'étendait sur toute la conduite.

Soit, en effet, un tuyau de longueur L et de diamètre constant D produisant une dépense Q; supposons que, pour augmenter ce débit, on double le diamètre sur une longueur $\frac{1}{3}$ L; l'intégrale $\int_0^L \frac{ds}{D}$ devient alors :

$$\int_0^{\frac{2}{3}L} \frac{ds}{D^5} + \int_0^{\frac{1}{3}L} \frac{ds}{(2D)^5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{L}{D^5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{(2D)^5} = \frac{65}{96} \cdot \frac{L}{D^5}$$

Or, si dans l'équation (N) l'on remplace successivement l'intégrale par $\frac{L}{D^5}$ et par $\frac{65}{96} \cdot \frac{L}{D^5}$, l'on obtient :

$$Q^2 = \frac{\theta\pi^2 D^5}{64\, L b_1} \quad \text{et} \quad Q'^2 = \frac{96\, \theta\pi^2 D^5}{64 \times 65 \times L b_1}$$

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{1}{\sqrt{\frac{96}{65}}} = \frac{1}{\sqrt{1,477}} = \frac{1}{1,22}$$

Si le diamètre avait été doublé sur toute la longueur, le débit Q'' eût été donné par la relation :

$$\frac{1}{Q''^2} = K \int_0^L \frac{ds}{(2D)^5} = \frac{1}{32} \cdot \frac{L}{D^5} \cdot K = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{Q^2}$$

en supposant $k = \frac{64\, b_1}{\theta\pi^2}$; et enfin :

$$Q'' = \sqrt{32}\ Q = 5,66\ Q$$

2° Supposons une loi de variation telle que le diamètre varie *uniformément* sur toute la longueur.

Représentant par D_1 et D_2 les diamètres en A et B (fig. 48), les

génératrices ab et $a'b'$ étant des droites symétriques sur l'axe AB, l'on aura, par hypothèse :

$$D = D_1 + \frac{D_2 - D_1}{L} \cdot s$$

où D exprime le diamètre en un point quelconque m, tel que $Am = s$; il suit de là, en différentiant :

$$ds = \frac{L}{D_2 - D_1} dD$$

et l'équation (N) devient :

$$\theta = \frac{64\, b_1}{\pi^2} \cdot \frac{Q^2 L}{D_2 - D_1} \int_0^L \frac{dD}{D^5} = \frac{16\, b_1}{\pi^2} \cdot \frac{Q^2 L}{D_2 - D_1} \cdot \left(\frac{1}{D_1^4} - \frac{1}{D_2^4} \right)$$

au moyen de laquelle on peut calculer Q en fonction de θ ou réciproquement, les diamètres et la longueur étant donnés.

III. *Des coudes et embranchements.*

a. Des coudes.

Lorsqu'une conduite simple n'est pas en ligne droite, il faut tenir compte des pertes de charge que le liquide éprouve, à chaque coude, par le changement de direction qui lui est imposé.

D'après un principe de mécanique, lorsqu'un mobile change brusquement de direction, il perd une partie de sa vitesse représentée par le sinus-verse de l'angle que forme sa nouvelle direction avec la trajectoire primitive. Par conséquent, si un mobile suit une ligne courbe, comme il change de direction à tout instant, il doit perdre, à tout instant aussi, une portion de sa vitesse. Mais ici la perte, à chaque changement de direction élémentaire, n'est qu'un infiniment petit du second ordre, et, quoique le nombre de pertes soit infini, la perte totale ne sera jamais qu'un infiniment petit du premier ordre, c'est-à-dire une quantité négligeable. Ceci revient à conclure que tout mobile qui arrive tangentiellement à une courbe, et qui la suit sur une longueur quelconque, jouit en la quittant de la même vitesse que celle dont il était doué à son arrivée.

Il ne faudrait pas déduire de ce qui précède qu'un liquide en mouvement dans une conduite n'éprouverait aucune perte de vitesse en suivant un coude parfaitement arrondi, quelque grand que fût le rayon de courbure. En effet, les molécules liquides étant indépendantes les unes des autres, il arrivera bien qu'une portion d'entre elles, en contact avec les parois, suivra la courbe d'une façon analogue à celle du mobile précité, mais les autres seront réfléchies par ces parois, ou par les molécules interposées, sous un angle très-variable : ainsi, le filet central aC (fig. 49) tend à aller rencontrer en C la paroi ACB et à se réfléchir suivant CB ; ce phénomène ne se produira pas en réalité à cause du choc de aC contre les molécules intérieures dans le voisinage du coude, mais de ces chocs mêmes des molécules entre elles résultera dans la masse liquide une perte de vitesse variable avec la courbure.

Cette diminution de vitesse, et par conséquent de dépense, est toujours faible lorsque les coudes sont arrondis. Bossut cite une expérience qu'il a faite (1) sur un tuyau de 0^m027 de diamètre et de 16^m24 de longueur, avec une charge de 0^m325 : lorsque le tuyau était en ligne droite, il donnait un débit de $0^{m^3}02084$ en une minute; disposé en serpentin avec six coudes arrondis, il a fourni un débit de $0^{m^3}02040$, c'est-à-dire, une différence insignifiante.

Quant aux lois que suit la résistance des coudes, et à sa mesure, il résulte de 25 expériences faites par Dubuat qu'elle est sensiblement proportionnelle au carré de la vitesse et au carré du sinus de l'angle de réflexion, le coefficient de proportionnalité étant égal à 0,0123 environ. Il en résulte que, dans une conduite où ces angles seraient représentés par α, α_1, α_2. . . . , la résistance R engendrée par les coudes devrait avoir pour expression :

$$R = 0{,}0123\, U^2 (\sin.^2\alpha + \sin.^2\alpha_1 + \sin.^2\alpha_2 + \ldots\ldots\ldots)$$

U étant la vitesse moyenne générale. Ou bien encore :

$$R = 0{,}02 \frac{Q^2}{D^4} (\sin.^2\alpha + \sin.^2\alpha_1 + \sin.^2\alpha_2 + \ldots\ldots\ldots)$$

Si l'effet des coudes bien arrondis est insensible, il n'en est pas de

(1) Bossut, *Hydrodynamique*, § 659.

même de celui des angles proprement dits ; l'expérience suivante de Venturi le prouve d'une manière remarquable. Après avoir disposé trois tubes, de 0^m38 de longueur et 0^m033 de diamètre, dont l'un fût en ligne droite, le deuxième coudé sous un angle vif de 90° et le troisième arrondi légèrement sous ce même angle, Venturi observa le temps nécessaire pour remplir un vase d'une capacité de $0^{m3}137$, au moyen d'une charge de 0^m88, en employant successivement les tuyaux en question ; il obtint les résultats suivants :

Tuyau rectiligne	45′
» coude à 90°	70′
» arrondi à 90°	50′

b. **Des embranchements.**

Dans les conduites à débit variable, des orifices ou des tuyaux secondaires déterminent des prises d'eau ou érogations dont l'influence se fait sentir sur la vitesse du liquide dans la conduite principale. D'un autre côté, lorsque l'eau passe de celle-ci dans un embranchement secondaire, plus ou moins incliné, elle éprouve une perte de charge qui est parfois considérable. La question présente donc deux problèmes à résoudre : l'un, qui concerne la vitesse dans le tronc générateur ; l'autre, qui se rapporte à la détermination de la vitesse dans une prise d'eau secondaire ou érogation. Examinons d'abord ce dernier.

Il résulte des considérations précédentes que, si un tuyau *xy* (fig. 50) s'embranche sur une conduite XY qui l'alimente, il y a une variation de niveau entre les sections AB et *ab*, tant à cause du changement entre les vitesses U et *u* respectives, que de la perte de charge qui a lieu dans l'intervalle. La théorie n'est pas encore parvenue à déterminer cette dernière ; l'on admet cependant qu'elle est principalement due à ce que la veine liquide qui entre dans la dérivation s'y contracte d'abord et produit un phénomène analogue à celui des ajutages. Les tentatives théoriques de MM. Genieys et Belanger, ainsi que l'expérience suivante de MM. Mallet et Genieys, tendent à prouver que cette perte, à l'entrée *x* et un peu au delà, serait le *double* de la hauteur due à la vitesse *u* en *ab* ; le troisième tiers de la perte totale produisant cette vitesse *u* de sortie.

La conduite principale, de 0^m25 de diamètre AB, alimentait une érogation de $0^m081 = ab$, et deux piézomètres étaient placés, l'un en amont vers AB, l'autre près de l'origine de la dérivation, sur l'embranchement même, vers ab. L'angle des deux conduites était de 90^c.

Lorsque la dépense par le tuyau secondaire xy était de $0^{m3}00435$, ce qui correspondait à une vitesse u de 0^m847, le piézomètre placé en ab se tenait à 0^m12 plus bas que l'autre. La hauteur due étant de 0^m0366, d'après le calcul théorique, il en résulte que l'abaissement réel du piézomètre était le triple ou plutôt 3, 3 fois plus fort que celui qui aurait produit la vitesse u de sortie.

Un résultat analogue se produisit dans une deuxième expérience où la vitesse s'élevait à 1^m003. Dans ce cas, comme dans l'autre, la vitesse U était assez faible pour pouvoir négliger la hauteur $\frac{U^2}{2g}$.

L'on peut donc conclure, avec Genieys, que : *la perte de charge* qui se produit *dans un embranchement,* par le fait de l'étranglement et de la vitesse u restante, est égale à *trois fois la hauteur due à la vitesse u,* dans ce tuyau secondaire ; le tiers de cette perte étant la charge nécessaire pour produire la vitesse u de sortie, les deux autres tiers seront considérés comme le fait de l'érogation (1).

Outre la perte produite par l'étranglement, l'eau éprouve encore, à son entrée, une petite perte de charge provenant de l'obliquité du tuyau xy de l'emprise.

Soit H' la charge effective en AB, c'est-à-dire la force qui pousse le liquide suivant XY; elle comprend implicitement la hauteur due à la vitesse U dans la conduite. Remarquons, à ce sujet, qu'en général la hauteur due à la vitesse de l'eau, en un point quelconque d'une conduite, est la différence entre la charge effective, ou charge proprement dite, et la pression sur ce point. Il y a donc erreur à prendre l'une pour l'autre ; mais, dans les grandes conduites, où la hauteur due à la vitesse n'est que de quelques centimètres, l'erreur est presque toujours sans conséquence. Rappelons aussi que l'on appelle charge effective en un point la différence entre la hauteur du réservoir, ou

(1) Genieys, *Essai sur les moyens de conduire, d'élever et de distribuer les eaux,* page 145.

charge entière, et celle qui est engendrée par les résistances éprouvées depuis l'origine jusqu'au point en question.

Si l'embranchement se trouvait sur le prolongement de l'axe XY, dans le sens du mouvement, l'eau y entrerait en vertu de la vitesse acquise U, et la hauteur $\frac{U^2}{2g}$ employée à la lui donner aurait son entier effet. Mais celui-ci serait nul si l'angle α était de 90°; le liquide n'entrerait dans le tuyau secondaire qu'en vertu de la seule pression piézométrique $H' - \frac{U^2}{2g}$. Dans toute autre inclinaison, pour obtenir la force d'impulsion XY, il faut ajouter à cette pression une partie de la hauteur due à U d'autant plus grande que α sera plus petit. D'après le principe de la décomposition des forces, cette portion utilisée sera $\frac{U^2}{g2}$. cos. α; par conséquent, la perte de charge provenant de l'obliquité sera égale à $\frac{U^2}{2g}(1 - \cos. \alpha)$.

Il résulte de ce qui précède que, si l'on représente par :

H la hauteur du liquide en tête du système général;

ΣR la somme des résistances, ou pertes de charge, sur la conduite, depuis l'origine jusqu'en AB;

ΣR_1 la somme des résistances sur le tuyau secondaire depuis *ab* jusqu'à la sortie;

u la vitesse moyenne dans ce dernier;

la charge effective *h*, celle qui agit à la sortie de *xy*, aura pour expression :

$$h = H - \Sigma R - \Sigma R_1 - 2 \times \frac{u^2}{2g} - \frac{U^2}{2g}(1 - \cos. \alpha)$$

dans laquelle $H - \Sigma R = H'$.

La charge *h* est la hauteur due à la vitesse *u* avec laquelle l'eau sort du tuyau d'emprise, hauteur dont la valeur est $\frac{U^2}{2g} \cdot \frac{d^4}{m^2 d_1^4}$, *d* étant le diamètre *ab*, et d_1 ainsi que *m* se rapportant à l'orifice de sortie. L'on aura donc, pour *l'équation du mouvement dans un embranchement quelconque :*

$$H - \Sigma R - \Sigma R_1 - 2 \times \frac{u^2}{2g} - \frac{U^2}{2g}(1 - \cos. \alpha) = \frac{u^2}{2g} \cdot \frac{d^4}{m^2 d_1^4}$$

Ou bien, en représentant par Q_1 le débit par le tuyau xy ; par Q celui de la conduite, correspondant à U, et par D le diamètre de cette dernière :

$$H - \Sigma R - 0{,}0826 \frac{Q^2}{D^4}(1 - \cos.\alpha) = \Sigma R_1 + 0{,}165 \frac{Q_1^2}{d^4} + 0{,}0826 \frac{Q_1}{m^2 d_1^4}.$$

Si l'orifice de sortie est tout à fait ouvert, les deux derniers termes se réunissent en un seul qui devient $0{,}248 \frac{Q_1^2}{d^4}$.

Le premier membre de l'équation précédente peut être considéré comme représentant la charge effective en tête de l'embranchement.

Examinons maintenant l'influence d'une érogation sur l'écoulement en aval. Plaçons, à cet effet, un piézomètre en AB et un second en A'B'. S'il n'y avait aucune perte de charge dans le passage du liquide de AB en A'B', le niveau piézométrique devrait se relever en A'B' d'une quantité égale à la diminution de la hauteur due à la vitesse ; celle-ci est, en réalité, plus faible en A'B', puisque, la section restant constante, la dépense a diminué de tout le volume qui s'écoule par l'emprise. Mais, comme il y a toujours une perte de charge, et qu'ici surtout il est difficile d'admettre que l'embranchement ne cause aucun trouble dans l'écoulement en aval, on pourra supposer que le niveau piézométrique est sensiblement le même qu'en AB. Ce résultat est, du reste, pleinement confirmé par des expériences de D'Aubuisson (1). L'on peut donc poser en principe que : *une prise d'eau faite sur une conduite ne diminue pas sensiblement la charge des points de cette conduite qui sont immédiatement en aval de l'endroit où elle est ouverte.*

C. DES CANAUX DÉCOUVERTS.

I. *Mouvement rectiligne et uniforme.*

Les considérations que nous avons exposées au § B. I. de ce chapitre s'appliquent en grande partie à l'importante question du mouvement de l'eau dans les canaux découverts. Aussi, les calculs d'analyse qui déterminent les lois des vitesses seront, pour les canaux,

(1) D'Aubuisson, *Traité d'hydraulique*, chap. III, art. 2.

analogues à ceux qui ont été développés pour les conduites; et la critique des diverses théories de Dubuat, De Prony, D'Aubuisson, Belanger, Dupuit, etc., reposera sur les principes énoncés déjà au même paragraphe.

a. **Loi et courbe des vitesses.**

Afin de rendre plus simple et plus compréhensible notre méthode analytique, nous supposerons momentanément, comme De Prony, que la section du canal soit un rectangle d'une largeur indéfinie dont les parois latérales n'opposent aucune résistance. Dès lors, tous les filets situés dans une couche parallèle au fond ont une vitesse égale, et il suffit, comme nous l'avons déjà vu, de considérer ce qui se passe dans une section verticale parallèle à la vitesse. Nous admettrons aussi que le fond du canal constitue un plan incliné, dont l'intersection avec une section normale quelconque soit une horizontale perpendiculaire au fil de l'eau; sur ce plan, et suivant la ligne de la plus grande pente, glisse une couche infiniment mince, qui supporte à son tour le glissement parallèle d'une deuxième couche liquide analogue, ce phénomène se produisant jusqu'à la surface.

Les différents points d'une même couche étant animés de la même vitesse, parallèlement à la ligne de plus grande pente du fond, à cause de l'uniformité du mouvement, cherchons la loi de variation de cette vitesse d'une couche à une autre qui lui serait contiguë.

Représentons par :

ψ la force retardatrice, rapportée à l'unité de masse, supportée à un instant quelconque par une molécule, sous l'influence de la viscosité;

θ la pente superficielle totale entre deux sections transversales distantes entre elles d'une longueur L;

H la profondeur totale du cours d'eau;

Z la distance d'une molécule quelconque au niveau supérieur;

V la vitesse à la surface;

W celle du fond;

U la vitesse moyenne;

F (W) une fonction exprimant la résistance du fond par mètre carré.

Les raisonnements présentés en *a* § B donneront encore la relation :

$$\theta = \frac{\psi L}{g}.$$

qui prouve que ψ est constant pour toutes les molécules ; l'on peut donc obtenir aussi sa valeur en divisant L.F (W) par la masse totale $\frac{\Delta}{g}$ LH, sur laquelle cette adhérence réagit ; de là :

$$\psi = \frac{g\theta}{L} = \frac{g}{\Delta} \cdot \frac{F(W)}{H}$$

$$\frac{\theta}{L} \cdot H = \frac{1}{\Delta} \cdot F(W) \text{ ..... } (a)$$

équation par laquelle W est déterminé.

L'on arrivera encore à une troisième expression de ψ en faisant entrer en ligne la résistance de la cohésion. Nous savons que cette force, rapportée au mètre carré, se représente par $\varepsilon\left(-\frac{dv}{dz}\right)^m$, pour deux couches contiguës dont les vitesses sont v et $v + \frac{dv}{dz}\,dz$; la constante ε se rapportant à un même cours d'eau déterminé, et m étant égal à 2 d'après D'Arcy. Or, comme la couche d'épaisseur dz et de profondeur z supporte par mètre carré de sa surface supérieure une action $\varepsilon\left(-\frac{dv}{dz}\right)^m$, donc L. $\varepsilon\left(-\frac{dv}{dz}\right)^m$ sur la longueur L ; qu'en outre, elle reçoit par sa surface inférieure une action en sens contraire égale à la somme de la précédente et de sa différentielle en z, la résultante de ces deux forces, divisée par la masse $\frac{\Delta}{g}$ Ldz représentera la troisième valeur de ψ cherchée ; d'où :

$$\psi = \frac{L.\,\varepsilon\,\frac{d}{dz}\left[\left(-\frac{dv}{dz}\right)\right]dz}{\frac{\Delta}{g}Ldz}$$

$$\psi = \frac{g\varepsilon}{\Delta} \cdot \frac{d}{dz}\left[\left(-\frac{dv}{dz}\right)^m\right]$$

Ou bien :

$$\frac{\theta}{L} = \frac{\varepsilon}{\Delta} \cdot \frac{d}{dz}\left[\left(-\frac{dv}{dz}\right)^m\right]$$

Cette équation devient, par une première intégration :

$$\left(-\frac{dv}{dz}\right)^m = \frac{\Delta\theta}{\varepsilon L} z + C$$

où la constante C représente ce que devient $\left(-\frac{dv}{dz}\right)^m$, c'est-à-dire l'action de la cohésion, lorsque $z = o$, à la surface. Si cette constante n'était pas nulle, dans ce cas, l'on aurait :

$$L\varepsilon \cdot \left(-\frac{dv}{dz}\right)^m = L\varepsilon C$$

c'est-à-dire que la couche supérieure devrait son équilibre, d'un côté à une résistance finie $L\varepsilon C$ provenant de la couche inférieure contiguë, de l'autre à l'action de la pesanteur ou $\Delta L dz$ qui est infiniment petite. Comme cet équilibre est impossible et que, par suite, le mouvement uniforme n'aurait pas lieu en cette partie, il faut poser : $C = o$; de là :

$$-\frac{dv}{dz} = \left(\frac{\Delta\theta}{\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{m}} z^{\frac{1}{m}}$$

Une deuxième intégration donnera :

$$v = V - \left(\frac{\Delta\theta}{\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot z^{\frac{m+1}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

relation analogue à celle que nous avons trouvée en (q) au § B. Et, pour déterminer V en fonction de la quantité W connue, comme dans l'équation (r), il suffira de faire $z = H$ dans la relation (b) ; l'on obtiendra ainsi :

$$W = V - \left(\frac{\Delta\theta}{\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot z^{\frac{m+1}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

et par conséquent :

$$\frac{V - v}{V - W} = \left(\frac{z}{H}\right)^{\frac{m+1}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Cherchons maintenant l'expression de la vitesse moyenne. A cet effet, égalons les deux valeurs de la dépense, en les divisant au préalable par la largeur du canal. Il viendra :

$$\int_o^H v dz = UH$$

D'où il résulte :

$$U = \frac{1}{H}\int_0^H v dz$$

Si, dans cette relation, l'on remplace v par sa valeur tirée de l'équation (d), l'on obtient définitivement pour la vitesse moyenne :

$$U = \frac{1}{H}\int_0^H \left[V - (V - W)\left(\frac{z}{H'}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right] dz$$

$$U = V - \frac{m}{2m+1}(V - W)$$

$$U = \frac{(m+1)V + mW}{2m+1} \quad \ldots\ldots\ldots (e)$$

Ou bien, encore :

$$U = \frac{1}{2}(V + W) + \frac{1}{2(2m+1)}(V - W) \quad \ldots\ldots\ldots (f)$$

les vitesses W et V sont déterminées par les équations (a) et (c), dans lesquelles entrent les variables $\frac{\theta}{L}$ et H.

Les résultats de l'analyse précédente sont basés sur l'hypothèse d'une section rectangulaire toute spéciale, dans laquelle l'action des parois latérales est complétement négligée.

M. Sonnet, dans un mémoire déjà cité, a abordé la question d'une section rectangulaire, de largeur finie, dans laquelle les parois latérales exercent sur le liquide une résistance analogue à celle du fond. Nous examinerons ce problème en traitant de la théorie et des résultats présentés par cet ingénieur. Ces derniers sont infiniment plus exacts et plus conformes à l'expérience que ceux que l'on obtiendrait par les formules empiriques de D'Aubuisson, De Prony ou Eytelwein ; mais, contrairement à la conclusion de l'Académie (1), nous ne pouvons admettre que les formules de M. Sonnet méritent d'être considérées comme l'expression analytique de la loi naturelle du mouvement dans les canaux découverts.

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences*. 1845, tome XX, pag. 786.

b. Examen critique des théories de Dubuat, De Prony, D'Aubuisson, Eytelwein, Sonnet, Dupuit et D'Arcy.

1° *Dubuat.*

Les principes et les formules de Dubuat reposent sur 38 expériences qu'il a exécutées sur deux canaux en bois qui, par leur section, se trouvaient dans les plus mauvaises conditions pour révéler la loi des vitesses. L'un d'eux, de forme rectangulaire, avait 0^m487 de largeur; la section de l'autre était un trapèze dont la petite base avait 0^m156, et dont les côtés avaient une inclinaison de 36° 20′ sur l'horizon. La profondeur d'eau y a varié de 0^m054 à 0^m273 seulement, et la vitesse, de 0^m16 à 1^m30.

C'est d'après ces expériences que Dubuat a conclu les lois du mouvement de l'eau dans les canaux en général; il en a déduit les principes suivants qui ont servi de guides à De Prony, D'Aubuisson, etc., et qui ne sont remarquables que par leur inexactitude radicale.

1° Le rapport $\frac{V}{W}$, dans des canaux différents, est d'autant plus grand que la vitesse U est plus petite.

2° Le rapport $\frac{V}{W}$ est indépendant de la profondeur H de l'eau.

3° La vitesse moyenne est une moyenne proportionnelle entre V et W, c'est-à-dire :

$$U = \frac{V + W}{2}$$

indépendante du périmètre χ mouillé, de la section Ω et de la pente i du canal.

4° La relation entre V et W est donnée par la formule suivante :

$$W = (\sqrt{V} - 0{,}165)^2$$

Ou bien :

$$V = (\sqrt{W} + 0{,}165)^2$$

5° La vitesse moyenne est aussi une fonction de W indépendante de χ, Ω et i, et peut se représenter par :

$$U = \frac{V + W}{2} = \frac{W + (\sqrt{W} + 0{,}165)^2}{2}$$

C'est en s'appuyant sur cet axiome complétement faux que M. De Prony a cru pouvoir substituer, dans sa formule, la vitesse moyenne U à celle du fond W.

6° La vitesse moyenne peut s'exprimer comme suit en fonction de V :

$$U = \frac{V + W}{2} = (\sqrt{V} - 0{,}082)^2 + 0{,}00677$$

Les équations qui précèdent, et les conclusions de Dubuat, en général, ne possèdent *aucune valeur scientifique*. Nous les avons exposées afin de prouver que l'expérience seule peut égarer les plus habiles praticiens, et produire des erreurs d'autant plus désastreuses qu'elles sont patronées par des savants plus recommandables.

2° *De Prony.*

Ainsi que nous l'avons exposé en *b* § B, les calculs analytiques qui servent de point de départ à M. De Prony se rapportent au mouvement de l'eau dans un canal rectangulaire de largeur indéfinie. Il en a conclu l'équation générale :

$$\Omega i = \chi F(U)$$

qui s'applique à la fois aux canaux découverts et aux tuyaux de conduite, sauf une différence dans les valeurs des constantes de F (U).

D'après De Prony, si l'on représente F (U) par l'expression :

$$\Delta (aU + bU^2)$$

où Δ exprime encore le poids du mètre cube d'eau, il faut donner aux coefficients *a* et *b* les valeurs expérimentales :

$$a = 0{,}00004445 \quad \text{et} \quad b = 0{,}000309514.$$

Pour déterminer ces coefficients il s'est servi de 31 expériences dans lesquelles :

La vitesse U maxima avait été de 0^m88 par seconde;
Le périmètre mouillé χ . . . 16^m00 courants ;
La section Ω . . . . . 29^m00 carrés.

Sur ces 31 expériences, vingt-trois avaient été faites dans des canaux artificiels n'ayant pas 0^m10 carré de section ni 1^m00 de périmètre mouillé; la vitesse moyenne U s'y obtenait facilement, par ob-

servation, au moyen de la dépense $Q = \Omega U$. Quant aux huit autres, elles avaient été observées sur des canaux naturels, mais de petites dimensions, d'après ce qu'on a vu. Pour connaître, dans celles-ci, la valeur de U, qui, dans les cours d'eau ne peut guère être connue que par le calcul, De Prony employa d'abord la formule de Dubuat :

$$U = (\sqrt{V} - 0{,}082)^2 + 0{,}00677$$

Mais il trouva, pour cinq des huit expériences, des valeurs de U tout à fait différentes des vingt-trois valeurs données par observation. Il jugea alors nécessaire de remplacer la formule de Dubuat par une autre relation empirique, au moyen de laquelle il y eut concordance dans les 31 expériences citées ; il crut avoir posé ainsi une formule générale représentant également les lois naturelles du mouvement dans les petits canaux et dans les grandes sections des rivières. Cette formule est la suivante :

$$U = V . \frac{V + 2{,}372}{V + 3{,}153}$$

Pour des valeurs de V variant entre 0^m50 et 2^m00, le rapport $\frac{U}{V}$ se rapproche beaucoup de 0^m80. De Prony en conclut que, dans la pratique, l'on peut poser la relation :

$$U = 0{,}80\ V$$

Tels sont, encore aujourd'hui, les singuliers principes religieusement acceptés par la généralité des ingénieurs. Plus d'un demi-siècle s'est écoulé (1) dans cette hérésie, et malgré les remarquables ouvrages des Navier, des Dupuit, etc., nous voyons s'étaler, dans la plupart des traités en usage et des cours de mécanique appliquée, la formule d'hydraulique la plus illégalement déduite et la plus en opposition aux lois de la nature !

Une dernière remarque sur ce sujet. Établissons ce que devient, dans cette formule, le rapport $\frac{U}{V}$, pour quelques valeurs de V :

Pour $V = 0{,}25$ . . . . . $\frac{U}{V} = 0{,}77$

(1) De Prony, *Jaugeage des eaux courantes*, 1802.

Pour $V = 0,50$ . . . . . $\frac{U}{V} = 0,79$

» $V = 1^m00$ . . . . . $\frac{U}{V} = 0,81$

» $V = 2^m00$ . . . . . $\frac{U}{V} = 0,85$

» $V = 3^m00$ . . . . . $\frac{U}{V} = 0,87$

Ainsi, dans un même cours d'eau, la différence entre la vitesse à la surface V et la vitesse moyenne U sera d'autant plus faible que V sera plus notable. Comme le mouvement est uniforme, la dépense $Q = \Omega U$ doit rester constante ; par suite, les plus grandes valeurs de U correspondront aux plus petites profondeurs de l'eau, et la formule de M. De Prony conduit nécessairement à cette conclusion : que la vitesse moyenne est variable avec la profondeur du canal, et que le rapport $\frac{U}{V}$ augmente quand cette profondeur diminue.

Or, cette dernière conclusion paraît sanctionnée par les expériences de Brünings, Ximénès, etc. Elle est acceptée par D'Aubuisson, et démontrée par Dupuit, ainsi que par la méthode analytique que nous avons exposée en *a* § C.

Mais, d'un autre côté, il est facile de démontrer, soit avec Dupuit, soit avec notre formule rationnelle (*f*) du paragraphe précité, que la loi d'accroissement du rapport $\frac{U}{V}$ est précisément en sens contraire de la formule empirique. Nous reviendrons sur cette anomalie dans l'exposé de la théorie de Dupuit, et nous expliquerons par quelles circonstances il peut arriver que les formules de De Prony satisfassent à l'expérience.

5° *Eytelwein.*

La seule modification apportée par Eytelwein à la théorie précédente consiste dans les nouvelles valeurs qu'il a données aux coefficients *a* et *b* de F (U). Afin de généraliser davantage l'emploi des formules de Dubuat et De Prony, il les appliqua à 91 expériences, recueillies dans divers ouvrages d'hydraulique, et s'étendant entre des

limites beaucoup plus larges que celles des auteurs en question ; c'est ainsi qu'il méla indistinctement les résultats obtenus sur de petits canaux avec ceux que Funck, Brünings, Ximénès et Woltmann avaient observés sur des fleuves très-rapides, tels que le Wahal, l'Arno et le Rhin.

Il en conclut pour a et b les valeurs suivantes :

$$a = 0{,}000024265 \quad \text{et} \quad b = 0{,}000365543$$

La vitesse moyenne avait été calculée, pour chaque expérience, par la formule :

$$U = V. \frac{V + 2{,}372}{V + 3{,}153}$$

Nous allons examiner les conséquences de cette manière de procéder.

Si l'on représente par R le quotient $\frac{\Omega}{\chi}$, que Dubuat appelle *rayon moyen* de la section, l'équation générale de De Prony :

$$\frac{\Omega}{\chi} i = \alpha U + \beta U^2$$

peut se mettre sous la forme :

$$Ri = \alpha U + \beta U^2 \text{ ..... } (m)$$

Ou bien encore, avec M. Steichen :

$$g. Ri = \alpha' U + \beta' U^2$$

qui revient à la précédente en posant : $\alpha = \frac{\alpha'}{g}$ et $\beta = \frac{\beta'}{g}$. D'après ce que nous verrons plus loin, la plupart des hydrauliciens modernes, entre autres, De Saint-Venant, Tadini, Dupuit, D'Arcy et Bresse, admettent, par expérience, que l'équation (m) peut se réduire ainsi :

$$Ri = b_1 U^2$$

cette formule étant d'autant plus rigoureuse que les vitesses sont plus fortes. Il en résulte qu'Eytelwein a trouvé pour F (U) une valeur plus grande que celle qui serait donnée par la formule de De Prony :

$$F(U) = \Delta\,(0{,}00004445\ U + 0{,}000309314\ U^2)$$

Or, c'est l'inverse qui aurait dû se présenter, en admettant comme exactes les données des expériences considérées, ainsi que la formule employée, pour calculer la vitesse moyenne. En appliquant la formule

de De Prony à de grandes sections comme l'a fait Eytelwein, l'on aurait dû évidemment trouver des vitesses trop faibles, puisque cette formule ne tient pas compte de la vitesse relative que prennent les molécules en s'éloignant de la paroi. Si l'inverse est arrivé, c'est que, dans les fleuves précités, les sections ne sont pas régulières comme dans un petit tuyau ou un canal microscopique ; de là production de mouvement varié, et pertes de forces vives par les irrégularités, circonstances dont les formules ne pouvaient tenir compte. C'est spécialement à cette dernière cause qu'il faut attribuer l'exagération des expériences calculées par Eytelwein. Il est, du reste, facile de démontrer, par l'analyse de Dupuit, que ces derniers eussent été plus faibles que ceux de De Prony, si les données des nombreuses expériences et les formules qui leur furent appliquées pour déterminer la vitesse moyenne eussent mérité quelque confiance.

Tel est cependant le modeste bagage scientifique qui a servi, depuis 1816, à calculer les lois du mouvement dans les rivières et les canaux découverts ! Vainement Dupuit a sapé par la base ces formules creuses et ces expériences incohérentes ; vainement il est parvenu à intégrer la véritable équation différentielle du mouvement varié. La confiance apathique a subsisté ; et lorsque, après ce profond et méthodique mathématicien, d'autres illustres ingénieurs sont venus compléter, par leurs lumières ou leurs expériences, la théorie rationnelle et rigoureuse du mouvement des liquides dans les conduites et les cours d'eau, la science si importante de l'hydraulique est restée en Belgique, pour la généralité des praticiens, des ingénieurs et des professeurs de mécanique appliquée, au niveau où elle se trouvait il y a environ un demi-siècle !

Les sciences, il est vrai, ne s'avancent que par degrés dans la voie de la vérité ; souvent, les progrès apportés à une seule branche sont disséminés dans un grand nombre de traités ou de mémoires, desquels il est indispensable de faire, au préalable, une étude approfondie. L'hydraulique spécialement se trouvait jusqu'ici dans cette catégorie ; trouvant plus facile de nier l'évidence, trop obstinés peut-être aussi dans leur doctrine routinière, la plupart des savants chargés de l'instruction publique ont renoncé au pénible labeur que nous nous sommes imposé en écrivant le présent ouvrage. Désormais la déplo-

rable lacune n'aura plus de raison d'exister dans l'enseignement de notre pays, et le but de notre travail sera atteint si nous parvenons, par la publication de ce traité d'hydraulique, à substituer la vérité à l'erreur, les équations rigoureuses du mouvement réel des liquides aux formules empiriques et inexactes de Dubuat, De Prony, Eytelwein et D'Aubuisson.

Nous n'entrerons pas dans de longs détails sur la méthode de M. Steichen. Ses idées sur le mouvement de l'eau dans les canaux découverts, à régime constant, remontent à 1816, et se résument dans les trois formules suivantes, d'Eytelwein et De Prony, que nous ne connaissons que trop :

$$Ri = \alpha U + \beta U^2 = 0{,}00004445\ U + 0{,}000309314\ U^2 \ldots\ldots\ (1)$$

$$Ri = \alpha' U + \beta' U^2 = 0{,}00002426\ U + 0{,}00036554\ U^2 \ldots\ldots\ (2)$$

$$U = V.\frac{V + 2{,}372}{V + 3{,}153}$$

Quant à la confiance qu'il leur accorde, l'on en aura un aperçu suffisant par ces quelques lignes extraites de son cours autographié (1) :

« En comparant entre eux les résultats de ces deux formules (1) « et (2), M. De Prony a trouvé qu'elles représentent avec un degré « d'exactitude à peu près égal les résultats des expériences tant an- « ciennes que nouvelles. De plus, il a remarqué que ces résultats « sont également bien représentés par la formule des tuyaux de con- « duite, et même avec un degré d'exactitude comparable à celui de la « formule de M. Eytelwein, quoique celle-ci soit déduite d'une plus « grande variété d'expériences. Cette remarque peut être importante « pour beaucoup de cas. »

Ainsi, d'après M. Steichen, les phénomènes du mouvement de l'eau sont tout à fait identiques dans un petit tuyau de conduite et dans un fleuve comme le Rhin ; les formules qui les représentent peuvent donc être confondues. Cette conclusion est très-claire ; elle ne présente pas même les sages restrictions et les doutes prévoyants de MM. De Prony et D'Aubuisson, sur la légitimité de leurs bizarres formules.

(1) Steichen, *Cours de mécanique appliquée*, section VI.

4° *D'Aubuisson.*

Nous avons vu que D'Aubuisson admet une similitude complète entre le mouvement de l'eau dans les conduites et celui des cours d'eau naturels. Partant de là, il pose, comme expression générale de la résistance, sur l'unité de longueur :

$$F(U) = A' \frac{\chi}{\Omega} (U^2 + B'U)$$

et comme elle doit faire équilibre à la force accélératrice gp engendrée par la pesanteur (a § A), il en conclut l'équation générale :

$$gp = A' \frac{\chi}{\Omega} (U^2 + B'U)$$

Pour une longueur L′ de canal, dont la pente absolue serait i, ou $\frac{H''}{L'}$, l'on aurait $p = \frac{i}{L'}$, et par suite :

$$ig = A' \frac{\chi L'}{\Omega} (U^2 + B'U)$$

$$i = A \frac{\chi L'}{\Omega} (U^2 + B'U)$$

Si l'on considère le canal dans son entier, depuis la prise d'eau, il faut retrancher de la pente la hauteur H due à la vitesse v du mouvement uniforme ; de là :

$$i \text{ ou } \frac{H'}{L} - \frac{v^2}{2g} = A \frac{\chi L}{\Omega} (U^2 + B'U)$$

Quant aux constantes A et B′, D'Aubuisson adopte, mais à regret, les valeurs trouvées par Eytelwein. Il accepte de la même façon la formule :

$$U = V. \frac{V + 2{,}372}{V + 3{,}153}$$

en ajoutant ces réflexions : « Quelque confiance que méritent les ob-
« servations de Dubuat, elles ont été faites sur de si petites profondeurs
« qu'il m'est bien difficile d'admettre, avec lui, que la vitesse du fond,
« et par suite la vitesse moyenne, est indépendante de la profondeur ;

« d'autant plus que les observations faites sur les grands fleuves « semblent indiquer qu'elle diminue quand la profondeur augmente. « Quoi qu'il en soit, me bornant uniquement à ce qui concerne les « canaux peu profonds, j'adopterai, mais seulement comme mode « d'approximation, le résultat des expériences de Dubuat, tel qu'il a « été présenté par la formule de M. De Prony. »

5° *Navier-Sonnet.*

Les principes et les conclusions de la théorie de Navier ont été suffisamment développés aux § C. *g'* du chapitre I et § B. I. *b* du chapitre IV.

Nous savons aussi que M. Sonnet a modifié l'hypothèse de Navier en prenant, pour représenter les résistances de la viscosité, une même fonction de la vitesse relative développable suivant les puissances entières de sa variable, dont il conserve un monôme ou un binôme, suivant l'application. Il en résulte que, dans l'opinion de M. Sonnet, la cohésion et l'adhérence sont considérées comme des forces de même nature ; que, par suite, elles peuvent être représentées par une formule d'interpolation d'un nombre variable de termes, suivant que l'expérience l'exige. Il est inutile de prouver encore l'inexactitude d'un tel principe. Pour ce qui concerne la cohésion, l'expression $\varepsilon \left(\frac{dv}{dz} \right)^m$ de Navier, qui a supposé $m = 1$, représente parfaitement une loi naturelle, si l'on évalue convenablement l'exposant m ; par conséquent, M. Sonnet a modifié, et non pas corrigé, l'hypothèse de son illustre prédécesseur. Du reste, cette modification était inutile ; en effet, les résultats analytiques obtenus par M. Sonnet, dans les cas particuliers qu'il a traités, concordent généralement avec ceux que l'on obtiendrait par les formules de Dupuit, Bresse, D'Arcy, et de la théorie rationnelle que nous avons exposée, formules qui s'appuient toutes sur le principe altéré par l'auteur.

Nous avons fait connaître au § B. I. *b* de ce chapitre, l'application que M. Sonnet a faite de sa méthode au cas d'un courant rectiligne à section circulaire. La seconde application se rapporte à l'écoulement dans un canal découvert et rectiligne, de section rectangulaire.

L'auteur suppose d'abord que les parois latérales n'apportent aucune résistance au mouvement du liquide ; c'est le cas, traité par Dupuit et par notre théorie, la largeur de la section étant censée indéfinie. Il trouve alors que la vitesse ne dépend que de sa profondeur z en dessous de la surface de niveau, et qu'elle diminue de cette surface au fond comme les ordonnées d'une parabole qui aurait pour axe le filet supérieur, le plan vertical et la convexité de cette courbe étant tournés dans le sens du courant. La vitesse moyenne serait une moyenne arithmétique entre trois quantités dont deux égales à la vitesse V du filet principal et la troisième représentant la vitesse W du fond, à proximité des rives.

Les formules précédentes correspondent à celles de Dupuit et de notre théorie, lorsque nous y faisons avec Navier, $m = 1$.

M. Sonnet étend ensuite le problème en donnant à la base une largeur finie, de façon que l'action des parois latérales produise sur le liquide une résistance analogue à celle du fond.

Dans le but de simplifier les équations différentielles qui se rapportent aux filets voisins des parois de rive, l'auteur profite de ce que la vitesse toujours très-petite en cet endroit y varie entre des limites peu étendues ; par suite, il substitue à la fonction qui exprime la résistance un simple binôme du premier degré, ce qui revient à remplacer approximativement un arc de faible courbure par une ligne droite. L'auteur arrive à une expression différentielle dans laquelle les deux coefficients du binôme se déterminent par la méthode des moindres carrés ou autrement, et qui rentre par conséquent dans les formules d'interpolation.

Ainsi modifiées, les équations différentielles en question deviennent faciles à intégrer complétement (1). La vitesse du liquide dans un canal à section rectangulaire est alors exprimée par une fonction composée d'une partie algébrique et d'une partie transcendante. D'après cette expression, les vitesses sur une même verticale décroissent de la surface au fond comme les ordonnées d'une courbe qui diffère d'autant plus d'une parabole que la verticale considérée est plus rappro-

(1) Extraits du t. XX des *Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences*. Paris, 1845.

chée des parois latérales. Les vitesses des filets situés à une même profondeur sont représentés par les ordonnées d'une *chaînette* qui tourne sa convexité dans le sens du courant. Ces résultats sont analogues à ceux que l'on est parvenu à connaître approximativement par les expériences déjà citées de Brünings, Woltmann, Funk, Ximénès, Defontaine, etc.

Afin de faciliter l'usage de l'équation qui exprime la vitesse v en un point quelconque, dont les coordonnées sont x et y, M. Sonnet en altère la généralité en ne conservant que les deux premiers termes de la partie transcendante; la vitesse v est alors donnée par l'équation :

$$v = V - \alpha x^2 - \beta y^2 \text{ ..... } (k)$$

dans laquelle V, α et β sont des constantes. L'axe des y est censé passer par le milieu du lit.

Cette équation ainsi simplifiée indique que la loi des vitesses, soit dans une même verticale, soit à une même profondeur, peut être représentée par une *parabole*, et que les molécules animées des mêmes vitesses sont sur des ellipses concentriques et semblables.

La formule (k) représente très-bien quatre séries d'expériences faites par M. Defontaine, sur le Rhin, en un lieu où la section du fleuve s'éloignait peu d'un rectangle de 1^m50 de profondeur sur 50 mètres environ de largeur.

D'après cette formule approximative, la vitesse moyenne est égale à la moyenne arithmétique entre la vitesse du filet principal V, la vitesse du fond W au milieu du courant, et la vitesse V′ à la surface près de la paroi. Les filets d'égale vitesse forment des cylindres à base elliptique semblables entre eux, et ayant pour axe de similitude le filet principal.

Le cylindre qui se meut avec la vitesse moyenne contient deux filets symétriquement placés, qui conservent les mêmes positions quelles que soient la pente et la résistance du lit (adhérence), pourvu que les dimensions de la section restent les mêmes ; les plans des coordonnées étant, d'une part, le plan vertical qui passe au milieu, d'autre part celui de la surface libre, les valeurs de x et de y pour ces filets particuliers sont respectivement égales à la demi-largeur du courant et à sa profondeur, toutes deux divisées par $\sqrt{3}$.

Si l'on considère que V′ est peu différent de V, l'on peut approximativement conclure avec M. Sonnet :

$$U = \frac{V + W + V'}{3} = \frac{2V + W}{3}$$

$$U = \frac{2}{3} V + \frac{W}{3}$$

qui est la formule de Dupuit. Au lieu de mesurer W au milieu, l'auteur prend la vitesse du fond près des rives; l'on conçoit qu'il doit en résulter une bien faible différence. Il ajoute, du reste, que le rapport $\frac{U}{V}$, toujours compris évidemment entre $\frac{2}{3}$ et 1, donne des valeurs moyennes qui s'éloignent peu de 0,80, adopté par De Prony. Ce résultat suffirait pour enlever aux formules de M. Sonnet leur cachet de généralité, si on l'acceptait à la lettre; mais nous expliquerons plus loin par quelles circonstances les formules de Dubuat et de De Prony peuvent satisfaire à certains cas particuliers d'observation, malgré leur nullité complète comme exactitude d'origine et de généralité.

D'après ce que nous avons vu, à propos des tuyaux de conduite, M. Sonnet a adopté, comme Navier, la valeur $m = 1$; se basant ensuite sur quelques expériences extraites des tables de De Prony, il a trouvé que ε est un coefficient indépendant de la forme et des dimensions du courant, et égal à $\frac{10}{32}$. Enfin il a proposé, pour formule empirique du mouvement dans les conduites :

$$F(W) = 0{,}019\,W + 0{,}371\,W^2$$

le mètre carré et le kilogramme étant pris pour unités, et la vitesse étant exprimée en mètres par seconde sexagésimale.

D'après cette expression, la résistance serait indépendante de la nature des parois; les expériences de M. D'Arcy ont prouvé l'inexactitude de cette hypothèse.

M. Sonnet admet pour ε la même valeur $\frac{10}{32}$, lorsqu'il s'agit de l'écoulement dans les canaux découverts. En outre, d'après lui, la formule empirique :

$$F(U) = 0{,}019\,U + 0{,}371\,U^2$$

s'appliquerait encore aux lits demi-circulaires.

6° *Dupuit.*

L'équation générale de la courbe des vitesses trouvée par Dupuit, est la suivante :

$$v = V - \frac{V - W}{H^2} z^2 \text{ ..... } (r')$$

ainsi que nous l'avons trouvée en (r') au § B. I. *b*. Si l'on prend pour axe des z la tangente à l'origine m (fig. 20), et si l'on appelle x les abscisses égales à $V - v$, l'équation (q') donne d'abord :

$$x = \frac{i}{2\varepsilon} z^2$$

et l'équation (r') de son côté :

$$x = \frac{V - W}{H^2} z^2$$

Ainsi :

$$x = \frac{i}{2\varepsilon} z^2 = \frac{V - W}{H^2} z^2$$

$$\frac{i}{2\varepsilon} = \frac{V - W}{H^2} \text{ ..... } (H)$$

Ou bien encore :

$$z^2 = 2\frac{\varepsilon}{i} . x = \frac{H^2}{V - W} . x$$

Cette équation, qui représente la parabole des vitesses, prouve que, si la pente i reste constante, la courbe ne changera pas, quelle que soit la profondeur H, et que l'accroissement de cette profondeur n'a pour effet que d'augmenter toutes les vitesses d'une quantité égale, autrement dit de reporter en arrière la ligne AB. Ainsi, lorsque le fond descend de Bn (fig. 20) en B'n', la parabole $mbb'nn'$ représentera l'extrémité des vitesses, non plus par rapport à AZ, mais par rapport à A'B' situé en arrière à une distance B'n' > Bn, attendu que B'n' et Bn expriment les vitesses du fond qui croissent avec la profondeur, d'après la relation :

$$Hi = aW + bW^2$$

Ou bien aussi :

$$Hi = b_1 W^2$$

$$W = f(H)$$

i et b_1 étant ici des constantes.

Lorsque i est variable et H constant, le paramètre de la courbe change. Ainsi, la parabole *mn* (fig. 51) appartient à un canal dont la pente est plus petite que celle du canal qui donne *mn'* d'un paramètre inférieur.

La vitesse moyenne est donnée par cette propriété de la parabole que le segment *mtn* (fig. 20) est les $\frac{2}{3}$ du rectangle construit sur les coordonnées *tm* et *tn*. Dès lors :

$$UH = \frac{2}{3} H (V - W) + WH$$

$$U = \frac{2V + W}{3}$$

$$U = 0{,}67\,V + \frac{W}{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (L)$$

Nous allons expliquer, par cette expression, comment dans certains cas, la formule empirique de De Prony et celle de Dubuat ont pu correspondre aux résultats de l'expérience.

La formule (L), qui est exactement notre relation (f) dans laquelle on ferait $m = 1$, fait voir que le rapport $\frac{U}{V}$ est toujours compris entre 0,67 et 1,00. Mais, contrairement à ce que donne la formule de De Prony, ce rapport diminue quand la vitesse augmente. En effet, si dans l'équation (L) on remplace V par sa valeur tirée de la relation (H), il vient :

$$\frac{U}{V} = 0{,}67 + \frac{1}{3}\left(\frac{W}{W + \frac{H^2 i}{2\varepsilon}}\right)$$

$$\frac{U}{V} = 0{,}67 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 + \frac{H^2 i}{2\varepsilon W}}\right)$$

Mais, d'après Dupuit, l'on peut poser, comme il a été dit déjà :

$$Hi = b_1 W^2$$

$$W = \sqrt{b_1}\,\sqrt{Hi}$$

L'on obtient donc, en remplaçant W ou Hi :

$$\frac{U}{V} = 0{,}67 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 + CH^{\frac{5}{2}} i^{\frac{1}{2}}}\right) \text{ ..... (M)}$$

où C est une constante égale à $\frac{\sqrt{b_1}}{2\varepsilon}$; de même :

$$\frac{U}{V} = 67 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 + C'HW}\right) \text{ ..... (N)}$$

où C′ représente $\frac{b_1}{2\varepsilon}$.

Ainsi, d'après les équations (M) et (N) le rapport $\frac{U}{V}$ diminue à mesure que W et H augmentent, et il est constant lorsque le produit $H^{\frac{5}{2}} i^{\frac{1}{2}}$ ou HW est lui-même constant. Ceci explique comment, dans certaines circonstances tout exceptionnelles, l'expérience a pu vérifier la loi empirique de Dubuat et De Prony ; en effet, il est presque toujours arrivé que, dans les expériences sur des canaux artificiels, l'on a été forcé de diminuer H lorsqu'on augmentait i ou V, parce qu'on ne pouvait disposer que d'une faible quantité d'eau qui, autrement, se serait trop vite écoulée. Du reste, il n'y a coïncidence de résultats que lorsque le rapport est égal à 0,80, c'est-à-dire, quand W est environ la moitié de la vitesse V à la surface.

L'on arriverait aisément à la conclusion précédente par la seule inspection des figures 20 et 51 ; elles indiquent clairement l'influence de H, i, V et W, sur le rapport $\frac{U}{V}$.

Pour obtenir maintenant la position du filet liquide qui est animé de la vitesse moyenne U, il suffit de remplacer v par $\frac{2V + W}{3}$ dans l'équation (r') de la courbe :

$$v = V - \frac{V - W}{H^2} z^2 \text{ ..... } (r')$$

Il en résulte :

$$\frac{V - W}{H^2} z^2 = V - \frac{2V + W}{3}$$

$$z^2 = \frac{H^2}{3} = \frac{3}{9} H^2$$

$$z = \frac{1}{3} H \sqrt{3} = 0{,}58\ H$$

L'expérience a prouvé en effet que le filet moyen se trouve d'ordinaire un peu en dessous de la moitié, vers les 3/5 de la profondeur.

Voici donc les équations générales posées par Dupuit pour résoudre tous les problèmes d'une façon complète pour la pratique.

$$Hi = aW + bW^2 = b_1W^2 \text{ ..... } (1)$$

$$U = W + \frac{H^2 i}{3\varepsilon} \text{ ..... } (2)$$

$$V = W + \frac{H^2 i}{2\varepsilon} \text{ ..... } (3)$$

Nous avons vu que, pour les conduites, Dupuit donne à b_1 la valeur 0,0003855 qu'il considère comme très-large ; on prend généralement une valeur un peu moindre, lorsque au lieu d'un tuyau on considère un canal découvert.

Les formules (2) et (3) donneraient aussi la valeur de U en fonction de V et W, ou :

$$U = \frac{2V + W}{3}$$

Lorsque la section du canal est un demi-cylindre, l'auteur applique les formules des tuyaux de conduite. Nous avons vu que le même principe a été admis par M. Sonnet.

Ainsi que ce dernier, Dupuit traite la question pour une section rectangulaire à base finie, et il obtient des résultats analogues quoique partant d'une autre expression de la résistance due à la cohésion. Soit, par exemple, un rectangle ABCD (fig. 52), dans lequel on représente par :

l la demi-largeur AO = OB;
H la hauteur AD = BC;
V la vitesse centrale, en O;
W la vitesse du fond en E;
V_1 et W_1 les vitesses à la paroi en B et en C;
w la vitesse variable des filets contigus à la paroi horizontale EC;
w_1 la vitesse variable des filets contigus à la paroi verticale BC.

Prenons pour axes rectangulaires des x et des y la ligne AOX, suivant laquelle la surface libre est coupée par le plan de la section, et la verticale OY par le milieu. Un filet quelconque, dont *abcd* serait la section droite, éprouve sur ses quatre faces les effets de la cohésion

des couches voisines; d'après les notations admises par Dupuit, il est entraîné par le filet supérieur et retardé par le filet inférieur avec une intensité proportionnelle à sa largeur dx et à sa vitesse relative (l'auteur supposant que $m = 1$); la résultante de ces deux forces est donc :

$$-\varepsilon \frac{d^2v}{dy} dx$$

Notons ici que, pour satisfaire aux expériences de M. D'Arcy, cette expression devrait être :

$$\varepsilon\, dx\, dy \frac{d}{dy}\left[\left(-\frac{dv}{dy}\right)^m\right]$$

Le filet *abcd* est entraîné de même, suivant Dupuit, par le filet de droite et retardé par le filet de gauche, et la résultante est proportionnelle à :

$$-\varepsilon \frac{d^2v}{dx} dy$$

Quant à la pesanteur, elle agit avec une intensité accélératrice égale à :

$$i\, dxdy$$

Par suite, la surface des vitesses est représentée par l'équation aux différences partielles :

$$i = -\varepsilon \frac{d^2v}{dy^2} - \varepsilon \frac{d^2v}{dx^2} \quad \text{.....} \quad (J)$$

Cette équation est identique avec celle de Navier qui en a donné une solution complète dans le cas général du mouvement varié; mais les résultats qu'il a obtenus sont inexacts, d'après ce que nous avons déjà pu apprécier, la résistance à la paroi, ou l'adhérence étant censée proportionnelle à Bv.

Quoi qu'il en soit, l'auteur conclut ici, comme M. Sonnet, qu'une équation quelconque du second degré en x et y résout l'équation aux différences partielles (J), et qu'elle est de la forme :

$$v = C - Ay^2 - Bx^2 \quad \text{.....} \quad (K)$$

où C, A et B sont encore des constantes.

Si l'on y remplace C, A et B par V, W et V_1 en faisant $y = o$ et $z = o$, puis $y = H$ et $z = o$, et enfin $x = l$ et $y = o$, l'équation devient :

$$v = V - \frac{V - W}{H^2} y^2 - \frac{V - V_1}{l^2} x^2 \quad \text{.....} \quad (a)$$

Pour déterminer les trois vitesses inconnues V, W et V_1, Dupuit pose trois équations de condition qui expriment que les forces qui agissent sur le système se font équilibre. La première correspond à l'équation (J), et s'obtient en exprimant que chaque filet est en équilibre par rapport aux forces qui proviennent de la cohésion avec les quatre filets contigus :

$$i = 2\varepsilon \frac{V - W}{H^2} + 2\varepsilon \frac{V - V_1}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

L'auteur obtient les deux autres en posant : 1° que l'adhérence le long de la paroi verticale retient la tranche qui se meut le long de cette paroi avec la même énergie qu'elle est entraînée par la cohésion; 2° que l'adhérence le long de la paroi du fond est égale à l'énergie de la cohésion sur la couche inférieure :

$$\int_0^l (aw + bw^2)\,dx = 2\varepsilon \frac{V - W}{H}\, l \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

$$\int_0^H (aw_1 + bw_1^2)\,dy = 2\varepsilon \frac{V - V_1}{l}\, H \quad \ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Les variables W et W_1 s'expriment en x et en y au moyen de l'équation (a) en y faisant : $y = H$ et $x = l$; de là :

$$w = W - \frac{V - V_1}{l^2} x^2 \quad \text{et} \quad w_1 = V_1 - \frac{V - W}{H^2} y^2$$

Ainsi, les trois inconnues V, W et V_1 de l'équation (a) sont déterminées par les relations (b), (c) et (d).

L'équation (a) fait dès lors connaître la courbe des vitesses, ou plutôt la loi de leurs variations dans une section transversale quelconque. Si l'on y donne, par exemple, à x et y les valeurs $x = l$ et $y = H$, l'on obtient, pour la vitesse W_1 correspondant à ces coordonnées :

$$W_1 = W + V_1 - V$$

Ou bien :

$$W_1 + V = W + V_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

C'est-à-dire que la somme des vitesses situées à l'extrémité des deux diagonales DO et EA du demi-rectangle est la même.

La vitesse moyenne est donnée par l'équation :

$$Q \text{ ou } lHU = \int_0^H \int_0^l \left(V - \frac{V - W}{H^2} y^2 - \frac{V - V_1}{l^2} x^2\right) dxdy$$

qui devient par l'intégration :

$$U = \frac{V + V_1 + W}{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

L'on peut déduire de cette relation deux autres formules :

$$U = \frac{2V + W_1}{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (g)$$

$$U = \frac{2(V_1 + W) - W_1}{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (h)$$

en y remplaçant V_1 ou V par leur valeur tirée de la relation (*e*). Ces vitesses V, W et V_1 sont faciles à déterminer par le calcul. Soit, par exemple, $H = l$, hypothèse qui, d'après l'auteur, se rapporte aussi bien au cas d'un tuyau que d'un canal découvert spécial ; il en résulte $V_1 = W$, et, par suite, l'équation (*b*) devient :

$$\frac{H^2 i}{4\varepsilon} = V - W \quad \ldots\ldots\ldots \quad (i)$$

qui est identique avec la relation :

$$V = W + \frac{R^2 i}{4\varepsilon}$$

que nous avons posée, d'après Dupuit, pour les tuyaux de conduite. Il est important de remarquer, néanmoins, que la vitesse moyenne donnée par l'auteur pour les conduites n'est pas la même que celle des canaux découverts correspondants. En effet, pour les premières l'on a obtenu :

$$U = \frac{V + W}{2}$$

tandis que si l'on fait $V_1 = W$ dans l'équation (*f*) des canaux rectangulaires, l'on arrive à une valeur de U plus petite que la précédente, et qui est représentée par la relation :

$$U = \frac{V + 2W}{3}$$

L'on obtiendrait, par le calcul, la vitesse maxima W à la paroi au moyen de l'équation :

$$\frac{H^2 i}{2} = \int_0^H \left[a\left(W - \frac{i}{4\varepsilon} x^2\right) + b\left(W - \frac{i}{4\varepsilon} x^2\right)^2 \right] dx$$

Si l'on remarque que, dans le canal où $H = l$, la courbe des vitesses sur la surface est la même que dans une tranche verticale, puisque $V_1 = W$, l'on en déduira qu'il est possible de déterminer cette courbe par l'observation de V et de $V_1 = W$. En effet, il suffit alors de remplacer V et W dans l'équation (*i*) par les valeurs observées, et cette équation sera celle de la courbe des vitesses. Reste à donner à ε sa véritable valeur.

Ainsi que nous l'avons déjà vu, M. Sonnet a proposé, d'après les expériences de Couplet sur les conduites de Versailles, de prendre pour $\frac{1}{\varepsilon}$, quand il s'agit de l'eau, la valeur 3,200 ou 3200 selon qu'on introduit ou qu'on supprime Δ dans les formules. Si l'on applique cette valeur de $\frac{1}{\varepsilon}$ aux rivières, elle est, suivant Dupuit, de beaucoup inférieure à celle qui correspond aux résultats de l'expérience ; aussi donnerait-elle alors, pour U, des vitesses beaucoup plus considérables, même en l'appliquant à la formule de M. Sonnet :

$$U = W + \frac{H^2 i}{4\varepsilon}$$

Dupuit attribue cette erreur à la nature des expériences dont on l'a déduite ; celles-ci, en effet, ont été faites sur des tuyaux de petit diamètre pour lesquels la vitesse moyenne U était à peine d'un *demi-millimètre* plus grande que la vitesse W à la paroi. Il est vrai que, dans les conduites, l'influence de ε est moins importante que dans les canaux à grandes sections et à fortes pentes ; mais c'est, dès lors, ajoute l'auteur, un motif concluant pour déterminer ε par des observations faites sur ce genre de cours d'eaux et en employant la relation :

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{2} l^2 H^2 i}{(V - W) l^2 + (V - V_1) H^2}$$

extraite de l'équation (*b*), et qui convient à un canal rectangulaire quelconque.

D'après Dupuit, l'on pourrait, à la rigueur, calculer ε, ou l'énergie de la cohésion, par la formule :

$$\varepsilon = \frac{H^2 i}{4(V - W)}$$

au moyen d'un canal à section rectangulaire telle que $l = H$. Il suffirait d'observer V et W à la surface ; et pour obtenir une plus grande précision, il faudrait exécuter une série d'observations dans lesquelles on ferait varier l'inclinaison et les dimensions de la section transversale.

Nous ne suivrons pas l'illustre ingénieur dans ses considérations sur les canaux à section quelconque ; les résultats qu'il en déduit ne sont que des approximations analogues à celles de MM. Sonnet, Belanger, etc. Elles se résument dans les trois *équations générales* que nous avons citées en traitant, d'après l'auteur, la question des tuyaux de conduite. Il nous paraît cependant à propos d'en tirer une remarque très-intéressante au sujet de la substitution illicite que Dubuat, De Prony, D'Aubuisson, Eytelwein, etc., se sont permise en remplaçant F (W) par F (U) dans l'équation :

$$\frac{\Omega i}{\chi} = F(W) = aW + bW^2 + \ldots\ldots\ldots$$

Reprenons, à cet effet, la relation (v') qui donne la valeur du rapport $\frac{W'}{U}$ pour les tuyaux de conduite ; mais au lieu d'y faire $b = 0{,}000348$ remplaçons b par sa valeur 0,00031, donnée par De Prony pour le cas de canaux découverts :

$$\frac{W'}{U} = \frac{1}{1 + 0{,}25\, PW'}$$

Il résulte de cette équation que, dans un même cours d'eau, ce rapport varie peu, car la vitesse W′ diminue quand la profondeur P (ou H) augmente, puisque le débit est constant ; qu'en outre, dans les cours d'eau à faible vitesse ou très-peu profonds, comme ceux que Dubuat a employés, ce rapport est peu variable ; que, par conséquent, en réunissant ces circonstances et en prenant pour α et β des valeurs moyennes dans l'équation :

$$\frac{\Omega i}{\chi} = F(U) = \alpha U + \beta U^2 + \ldots\ldots\ldots$$

les résultats du calcul *pourront* se rapprocher plus ou moins de l'expérience.

« C'est ainsi, ajoute le logique mathématicien (1), que M. De Prony « a pu être conduit à conclure la généralité de sa formule de la con- « cordance des valeurs données par l'expérience pour les coefficients α « et β. Il avait proposé :

$$\alpha = 0{,}00004444999 \quad \beta = 0{,}000309313$$

« Eytelwein y substitua :

$$\alpha = 0{,}0000242651 \quad \beta = 0{,}000365543$$

« et ces dernières valeurs ont été adoptées par tous les hydrauliciens. « Il suffit de jeter un coup d'œil sur ces chiffres pour voir combien « on est loin d'un résultat précis, et nous ne concevons pas comment, « avec de pareilles différences, on peut avoir la patience inutile d'em- « ployer dans les calculs des nombres qui contiennent autant de « chiffres significatifs. Puisque l'on ne sait pas si $\alpha = 24$ ou 44, si « $\beta = 30$ ou 36, il est évident que les décimales que l'on ajoute à « ces nombres n'ajoutent rien à leur exactitude. A ce qu'il nous sem- « ble, on a complétement méconnu la signification et la portée de ces « coefficients. »

7° *De St-Venant-Tadini.*

Barré de St-Venant a proposé, pour les canaux, la formule déjà citée :

$$F(U) = \Delta C U^m$$

mais les valeurs de C et de m deviennent alors :

$$C = 0{,}000401 \quad m = \frac{21}{11}$$

Tadini et les ingénieurs italiens ont adopté une formule analogue mais plus simple et qui pourrait bien se rapprocher de la réalité. C'est la suivante :

$$F(U) = \Delta b_1 U^2 = \Delta .\ 0{,}0004\ U^2$$

Notons que b_1 est une constante, que Tadini suppose indépendante de la forme et des dimensions de la section transversale.

(1) J. Dupuit, *Études théoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courantes*, chap. I, § 31.

Remplaçant F (U) par cette valeur dans l'équation d'équilibre :

$$\frac{\Omega}{\chi} i = F(U)$$

ou bien ici :

$$\frac{\Omega}{\chi} i = \frac{1}{\Delta} F(U)$$

il obtient :

$$\frac{\Omega}{\chi} i = 0{,}0004\ U^2$$

Représentant par R le quotient $\frac{\Omega}{\chi}$, dit *rayon moyen* de la section, parce que dans le cas où elle devient demi-circulaire R est la moitié du rayon du cercle ou $\frac{D}{4}$, c'est-à-dire la moyenne entre les rayons extrêmes des couches concentriques, l'auteur met sa formule sous la forme :

$$Ri = 0{,}0004\ U^2$$

$$U = 50\sqrt{Ri} \ldots\ldots\ldots (X)$$

expression bien simple, connue sous le nom de *formule de Tadini.*

8° *Darcy-Bresse.*

Outre les résultats importants obtenus par M. Darcy pour le mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite, il existe de cet éminent ingénieur un grand nombre d'expériences encore inédites, dont la connaissance ne nous est parvenue que partiellement par M. Bresse, et qui se rapportent à l'écoulement dans les canaux découverts.

D'après M. Bresse, il est probable que, dans ce dernier cas comme pour les tuyaux, la résistance F (U) peut être représentée par le monôme $\Delta b_1 U^2$, dans lequel b_1 serait une quantité constante pour un même cours d'eau, mais variable probablement avec la surface et le périmètre de la section transversale. Si, approximativement, l'on assimile le lit d'un canal à un tuyau de grand diamètre, il faut poser :

$$b_1 = 0{,}000507 + \frac{0{,}00001294}{2H}$$

ou simplement :

$$b_1 = 0{,}000507$$

Cependant, ajoute M. Bresse (1), comme nous ignorons encore la valeur déduite par M. Darcy, et que généralement l'on attribue à b_1 une valeur moindre, nous prendrons seulement $b_1 = 0{,}0004$ comme les ingénieurs italiens. Remplaçant b_1 par cette valeur dans l'équation :

$$\frac{\Omega}{\chi} i = \frac{1}{\Delta} F(U)$$

il arrive à la formule de Tadini déjà citée :

$$U = 50\sqrt{Ri}$$

qu'il emploie pour résoudre les problèmes relatifs au mouvement uniforme de l'eau dans les canaux découverts.

Nous ne reviendrons pas sur les causes d'inexactitude de cette formule ; la principale provient de ce que la résistance à la paroi a été représentée par F (U), alors que la relation qui lie W et U contient d'autres variables.

Nous avons vu que, pour l'écoulement par des tuyaux cylindriques, M. Darcy a évité cette manière de procéder en représentant directement la valeur de b_1U^2 en fonction de la variable R ; cependant il faut remarquer qu'il ne tient pas compte de $\frac{\theta}{L}$ ou de la pente i par mètre courant, qui se trouve dans l'équation (o) :

$$\frac{R\theta}{2L} = \frac{1}{\Delta} F(W).$$

Il nous reste à faire connaître une dernière conclusion résultant des expériences inédites de M. Darcy sur les canaux. En développant la théorie de Dupuit, nous avons considéré l'action de la viscosité sur un filet quelconque dont *abcd* (fig. 52) serait la section droite, et nous avons posé l'expression suivante pour la résultante des actions sur les faces *ab* et *dc* :

$$\varepsilon dxdy \frac{d}{dy}\left[\left(-\frac{dv}{dy}\right)^m\right]$$

L'on aurait de même, pour la résultante sur *ad* et *bc* :

$$\varepsilon' dxdy \frac{d}{dx}\left[\left(-\frac{dv}{dx}\right)^m\right]$$

(1) M. Bresse, *Cours de mécanique appliquée*, seconde partie (*hydraulique*), chapitre IV, § 69. Paris, 1860.

Suivant M. Sonnet, le coefficient ε, représentant l'énergie de la cohésion, possède une valeur constante qui ne dépendrait ni de Ω ni de χ ou H, et qui serait toujours égale à $\frac{1}{3200}$. M. Dupuit trouve que cette valeur de ε est généralement trop faible quand on l'applique à des cours d'eau naturels, et qu'elle peut se déterminer, pour un canal rectangulaire quelconque, par la relation :

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{2} l^2 H^2 i}{(V - W) l^2 + (V - V_1) H^2} \text{ ..... } (Z).$$

dans laquelle V_1 exprime la vitesse à la surface contre la rive, comme dans la question relative à la fig. 52. Il admet, du reste, avec MM. Navier et Sonnet que $\varepsilon = \varepsilon'$.

Mais, d'après M. Darcy, il paraîtrait que ε' est différent de ε, et que ces deux quantités varient d'un canal à l'autre. Dans les canaux de largeur indéfinie et de profondeur constante H, le coefficient ε serait proportionnel à H^2; pour le cas d'une base finie, dans une section rectangulaire, ε' serait proportionnel au carré de la demi-largeur l, et ε au carré de la profondeur H.

Il est impossible d'apprécier convenablement la valeur de ces principes avant d'avoir pu juger les expériences sur lesquelles M. Darcy s'est basé pour les conclure. Nous ferons remarquer, en attendant, la coïncidence de ces observations avec la relation générale (Z), qui donne la valeur de ε dans la théorie de Dupuit, et que nous venons de citer.

c. Théorie rationnelle du mouvement uniforme dans les canaux très-larges et à fond peu accidenté.

Ainsi que nous l'avons vu en *b* § B. I, du présent chapitre, l'hypothèse d'une largeur indéfinie a servi de point de départ à De Prony, pour établir l'équation générale de sa théorie :

$$\frac{\Omega}{\chi} i = \varphi(W) = \varphi(U) = \alpha U + \beta U^2$$

dans laquelle on peut approximativement faire $\frac{\Omega}{\chi} = H$, vu la grande largeur supposée du lit.

Afin de faciliter les comparaisons, nous avons développé, en *a* § B. II, nos calculs analytiques rationnels dans la même hypothèse; ils nous serviront à résoudre ce problème considéré comme un simple cas particulier.

Soit donc, dans le canal hypothétique en question, *une partie* de longueur L, telle que la vitesse y soit constante, c'est-à-dire que H, Ω, χ, *i* n'y subissent pas de variation sensible. Conformément à la relation (*a*) de la théorie rationnelle précitée, l'équation rigoureuse d'équilibre, entre la pesanteur et la résistance à la paroi, est la suivante :

$$Hi = \frac{1}{\Delta} F(W)$$

Adoptant avec MM. Dupuit, Darcy et Bresse la valeur BW^2 pour F(U), nous aurons la formule :

$$\frac{\theta}{L} H = BW^2$$

ou bien :

$$Hi = BW^2 \text{ ..... (A)}$$

qui peut être mise sous la forme :

$$Hi = B \frac{W^2}{U^2} U^2$$

L'on voit que, si le rapport $\frac{W^2}{U^2}$ était constant, l'on aurait $\frac{W^2}{U^2} = C$, et $B \times C = b_1$; partant : $BW^2 = b_1 U^2$ où b_1 serait égal à $B \times C$, et non pas à B, remarquons-le bien. Mais le rapport $\frac{W^2}{U^2}$ ou $\frac{W}{U}$ est loin d'être constant; nous avons vu qu'il varie avec la pente *i* et la profondeur H. Cherchons d'après quelles lois ces quantités sont liées entre elles.

A cet effet, si, dans les relations (*c*) et (*e*), nous faisons $m = 2$, d'après M. Darcy, nous obtenons, par l'élimination de V :

$$U = W + \frac{2}{5}\left(\frac{\Delta\theta}{\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{2}} H^{\frac{3}{2}} \text{ ..... (B)}$$

et, par suite :

$$\frac{W}{U} = \frac{W}{W + \frac{2}{5}\left(\frac{\Delta\theta}{\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{2}} H^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{W}{U} = \frac{1}{1 + \frac{2}{5}\left(\frac{\Delta\theta}{\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{H^{\frac{5}{2}}}{W}} \quad \text{..... (C)}$$

ou bien encore :

$$\frac{W}{U} = \frac{1}{1 + \frac{2}{5}\left(\frac{\Delta}{\varepsilon} B\right)^{\frac{1}{2}} H} \quad \text{..... (C')}$$

Le mètre étant l'unité de mesure employée jusqu'ici et la densité de l'eau variant très-peu dans les circonstances ordinaires, nous pouvons conclure :

$$\frac{W}{U} = \frac{1}{1 + \frac{2}{5}\left(\frac{B}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} H} \quad \text{..... (C'')}$$

Quelle que soit la valeur de B, nous voyons par les relations suivantes :

$$\frac{W^2}{U^2} = C \quad \text{et} \quad \frac{b_1}{B} = C$$

que B est toujours plus grand que b_1 ; en second lieu, comme C est variable avec H et i, le rapport $\frac{b_1}{B}$ l'est aussi. Donc, puisqu'il est admis que l'on peut exprimer Hi par un monôme BW^2, tel que B soit une constante, il est de toute impossibilité que l'équation

$$Hi = b_1 U^2 \quad \text{..... (D)}$$

satisfasse aux phénomènes réels de la nature, lorsque b_1 y est censé constant, ainsi que l'admettent les auteurs précités.

Quelle que soit la loi qui détermine les vitesses des filets dans une section AB normale au courant, la courbe *mnn'*, au moyen de laquelle cette loi est géométriquement représentée, sera d'une forme analogue à celle de la fig. 20, c'est-à-dire *convexe du côté d'aval*, et telle que B*n* ou W soit < A*m* ou V. L'on voit donc, de prime abord, que, pour une augmentation BZ' en profondeur, l'accroissement correspondant de W est moindre que celui de V, attendu que la courbe *mn* rentre vers la base AZ ou A'B', à partir de laquelle sont appliquées

les distances, telles que $Am = V$; $Bn = W$; $KK' = U$; etc. Par suite, à mesure que H augmente, les rapports $\frac{W}{V}$ et $\frac{W}{U}$ doivent diminuer.

La même action se produit à mesure que i s'accroît; l'on peut en avoir une idée par la fig. 51. Cependant l'influence de la pente est beaucoup moindre que celle de la hauteur ou profondeur d'eau ; en effet, l'équation (C) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{W}{U} \text{ ou } \sqrt{C} = \frac{1}{1 + \frac{2}{5}\left(\frac{i}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{H^{\frac{5}{2}}}{W}}$$

Ainsi, C est une variable qui décroît sensiblement à mesure que H augmente, et comme $C = \frac{b_1}{B}$, la différence $B - b_1$ augmente aussi avec cette hauteur.

De cette dernière observation, l'on peut conclure que l'erreur commise en remplaçant BW^2 par b_1U^2 s'accroît avec l'étendue des limites de H entre lesquelles on applique la formule; si donc ces limites sont faibles, le rapport $\frac{W}{U}$ n'éprouvera que des variations insignifiantes et négligeables.

Ces considérations sont de nature à faire saisir comment, dans certains cas, la formule pratique (D) satisfait aux résultats d'expérience.

Établissons maintenant la formule générale d'équilibre d'après les conditions rationnelles et rigoureuses de l'écoulement. Nous avons vu que les équations :

$$Hi = BW^2 \quad \text{et} \quad Hi = b_1U^2$$

ne peuvent être satisfaites qu'à la condition que B et b_1 satisfassent à la relation :

$$b_1 = \frac{W^2}{U^2}$$

D'où il vient, après avoir remplacé $\frac{W}{U}$ par sa valeur tirée de (C″) :

$$B = b_1 \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3} H \frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} \quad \text{.....} \text{(E)}$$

Le coefficient B étant constant, il suffirait, pour le déterminer, de connaître la valeur de b_1 et la valeur correspondante de H qui satisfassent, dans une même expérience, aux équations précédentes.

Or, d'après les observations faites par M. Darcy sur des canaux découverts, il a été prouvé que, pour les valeurs de H et de i qu'il a employées, l'équation :

$$Hi = b_1 U^2$$

a été satisfaite par une certaine valeur constante N du coefficient b_1. Il en résulte que, si l'on désigne respectivement par h' et $h' + h''$, par i' et $i' + i''$, les limites de H et de i dans lesquelles l'observateur est resté, l'équation (E) doit être satisfaite en y remplaçant b_1 par N et H par $\frac{h' + (h' + h'')}{2} = \frac{2h' + h''}{2}$; l'on obtient ainsi la relation :

$$B = N \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{h' + h''}{2} \cdot \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2}$$

Cependant, par mesure de prudence, il faudrait poser :

$$B = N \frac{1}{\left\{1 - \frac{2}{5}(h' + h'')\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\varepsilon}}\right\}^2} \quad \text{..... (F)}$$

attendu qu'il est toujours préférable d'augmenter la valeur de B, par suite de la résistance due à la viscosité, ainsi que des légères pertes de force vive engendrées par les pierres, les plantes et autres obstacles qui tapissent le lit des cours d'eau.

Il est à regretter que les expériences en question soient encore inédites; nous ne pouvons par conséquent substituer ici à N et à $h' + h''$ les valeurs trouvées par l'éminent ingénieur. Notre formule ne mérite en cela que le reproche d'arriver trop tôt. En attendant, si nous faisons avec Dubuat et De Prony :

$$h' + h'' = 0{,}27 \quad \text{et} \quad b_1 = 0{,}00031$$

la relation (F) devient :

$$B = 0{,}00031 \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{5} \times 0{,}27 \times \frac{\sqrt{0{,}00031}}{\sqrt{\frac{1}{3{,}200}}}\right)^2}$$

$$B = 0{,}00031 \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{5} \times 0{,}27 \times 0{,}0316\right)^2}$$

$$B = 0{,}0003125$$

L'on obtient donc pour l'équation rationnelle d'équilibre :

$$Hi \quad \text{ou} \quad \frac{\Omega}{\chi} i = 0{,}0003125 . \frac{W^2}{U^2} . U^2$$

et en remplaçant $\frac{W}{U}$ par sa valeur tirée de (C″) :

$$Hi = 0{,}0003125\ U^2 . \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{5} \times 0{,}0316\ H\right)^2}$$

$$Hi \quad \text{ou} \quad \frac{\Omega}{\chi} i = 0{,}0003125 . \frac{U^2}{(1 + 0{,}0126\ H)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(G)}$$

Remarquons bien qu'en attribuant à b_1 ainsi qu'à $h' + h''$ des valeurs empruntées à Dubuat nous sommes loin d'encourir le moindre reproche d'inexactitude ou d'inconséquence. Nous n'avons, en effet, jamais nié l'aptitude de cet éminent physicien comme observateur; nous avons même fait connaître dans quelles circonstances sa formule peut satisfaire aux phénomènes du mouvement réel. Mais ce que nous avons prouvé être complétement inexact, c'est l'extension illégitime donnée à ses formules et aux résultats de ses observations.

d. Formules et applications.

La plupart des problèmes du mouvement uniforme de l'eau dans les canaux peuvent se résoudre au moyen de la formule (G) et de la relation :

$$Q = \Omega U \quad \ldots\ldots\ldots \text{(H)}$$

dans laquelle Q représente la dépense.

Parfois la vitesse moyenne U doit être calculée, soit en fonction de la vitesse V à la surface, soit en fonction de celle-ci et de la vitesse W du fond. L'on emploiera alors l'équation (*f*) trouvée en C, § *a* du présent chapitre :

$$U = \frac{1}{2}(V + W) + \frac{1}{2(2m + 1)}(V - W) \quad \ldots\ldots\ldots (f)$$

en y faisant, d'après M. Darcy, $m = 2$; d'où

$$U = \frac{1}{2}(V + W) + \frac{1}{10}(V - W) \text{ ..... (K)}$$

Quant aux vitesses V et W, elles sont déterminées par les relations (a) et (c) du même paragraphe :

$$H\frac{\theta}{L} \quad \text{ou} \quad Hi = BW^2 = 0{,}0003125\ W^2 \text{ ..... } (a)$$

et

$$W = V - \left(\frac{\theta}{\varepsilon L}\right)^{\frac{1}{m}} \frac{m}{m+1} . H^{\frac{m+1}{m}} \text{ ..... } (c)$$

Cette dernière devient, en y faisant $m = 2$

$$W = V - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{i}{\varepsilon}} . H^{\frac{3}{2}} = V - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{i}{3{,}200}} . H^{\frac{3}{2}} \text{ ..... (L)}$$

Ces formules sont applicables aux cas de canaux très-larges et à fond peu accidenté, pour lesquels l'action des parois latérales est considérée comme négligeable.

Lorsque la section du courant, sera un demi-cylindre ou un rectangle à base finie, l'on admettra les principes et les formules que nous avons exposés en C. § b dans l'examen des théories de Sonnet et Dupuit.

Si la base du lit, quoique très-grande, était assez accidentée pour que les vitesses W des filets fussent très-différentes entre elles, il faudrait décomposer la section du courant en plusieurs parties, que l'on calculerait, chacune séparément. Tel serait le cas indiqué à la fig. 53; l'on diviserait la section totale ABCDEFGaA en deux autres surfaces partielles, ABCDaA et aDEFGa, par une cloison verticale Da imaginaire.

Parmi les problèmes qui peuvent se résoudre par la formule (G) du mouvement uniforme, nous exposerons les suivants, dont l'énoncé est, pour quelques-uns, emprunté à M. Bresse, et qui sont assez remarquables.

I. *Connaissant la section transversale d'un lit prismatique,* (c'est-à-dire la longueur de la base et l'inclinaison des talus) *à pente constante, la dépense* Q, *et la pente i ou* $\frac{\theta}{L}$ *par mètre courant, trouver la hauteur* H *à laquelle s'élève l'eau dans chaque section, quand le mouvement est supposé uniforme.*

Soit MB*d*N la section transversale donnée (fig. 54); nous supposerons d'abord que la largeur soit assez grande par rapport à la profondeur moyenne. Menons, par le point B, l'horizontale BC, et construisons le rectangle B*bc*CB équivalent à la surface mixtiligne B*d*CB. Si A*a*D est censé représenter le niveau de l'eau, *a*B*b* sera la hauteur moyenne H cherchée; comme la longueur BC $= l$, connue par construction, diffère peu de la largeur moyenne du trapèze A*a*DCBA, nous aurons approximativement :

$$\Omega = lH, \quad \chi = l, \quad U = \frac{Q}{lH} ;$$

et l'équation (G) deviendra :

$$Hi = 0{,}0003125 \frac{Q^2}{\left\{lH\,(1 + 0{,}0126\,H)\right\}^2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(M)}$$

Si l'on employait, au lieu de l'équation (G), la formule :

$$Hi = 0{,}0004\,U^2$$

adoptée par Tadini, Bresse, etc., l'on obtiendrait :

$$Hi = 0{,}0004 \frac{Q^2}{l^2H^2}$$

et, par suite ;

$$H^5 i = 0{,}004 \frac{Q^2}{l^2}$$

$$H = \sqrt[5]{\frac{0{,}004\,Q^2}{l^2 i}} = 0{,}0737 \sqrt[5]{\frac{Q^2}{l^2 i}}$$

Si la hauteur H était assez grande et les talus latéraux peu inclinés sur l'horizon, il faudrait résoudre le problème par tâtonnement. Après avoir remplacé, s'il y a lieu, la surface B*d*CB (fig. 54) du fond par le rectangle équivalent BC*cb*B, l'on donnerait à H une certaine valeur $H' = n = ba'$, par exemple, au moyen de laquelle l'on calculerait : la surface A'B*bc*CD'*a*'A' $= \Omega'$, le périmètre mouillé A'B*d*CD' $= \chi'$, et la vitesse $U' = \frac{Q}{\Omega'}$. Remplaçant H ou $\frac{\Omega}{\chi}$ et U de l'équation (G) par H' ou $\frac{\Omega'}{\chi'}$ et U', il resterait à vérifier si, avec ces dernières valeurs, l'équation est satisfaite ; sinon, l'on ferait de nouvelles hypothèses sur la position du niveau de l'eau.

II. *Réciproquement, la section du canal et la ligne d'eau étant données, ainsi que la pente i, trouver la dépense* Q.

L'on peut ici calculer immédiatement Ω et H ; l'équation (G) fournira la valeur correspondante de U, et l'on obtiendra la dépense Q par la relation (H).

Dans le cas d'un canal très-large l'on pourra chercher Q directement au moyen de l'équation (M).

III. *Connaissant la dépense* Q *et la section transversale du courant, calculer la pente i.*

Ayant déterminé U par la relation (H), et mesuré H ou χ, l'on remplacera U et H ou $\frac{\Omega}{\chi}$, dans l'équation (G).

Pour les canaux très-larges l'on pourra encore employer la formule (H).

IV. *Étant données la section transversale du courant et la vitesse* V *à la surface, chercher la pente i et la dépense* Q.

Après avoir calculé $\frac{\Omega}{\chi}$ ou H d'après les données du problème, l'on déterminera U en fonction de V au moyen des équations (*f*) et (L). Remplaçant U par sa valeur dans la formule (G) l'on obtiendra *i*. Quant à la dépense, elle sera calculée par l'une des relations (H) ou (M), selon la valeur du rapport $\frac{H}{l}$.

V. *Connaissant la pente i et la dépense* Q, *chercher la section transversale du courant capable de produire cette dépense, c'est-à-dire ce volume d'eau en une seconde.*

Si, dans la formule (G), l'on remplace U par $\frac{Q}{\Omega}$, l'on obtient l'équation :

$$\frac{\Omega}{\chi} i = 0{,}0003125 \frac{Q^2}{\left(1 + 0{,}0126 \frac{\Omega}{\chi}\right)^2 \Omega^2}$$

ou bien :

$$\frac{\Omega^3}{\chi} i = 0{,}0003125 \frac{Q^2}{\left(1 + 0{,}0126 \frac{\Omega}{\chi}\right)^2}$$

Comme il n'existe pas d'autre équation que cette dernière entre les inconnues Ω et χ, le problème est indéterminé.

. *Mouvement varié permanent.*

a. Du mouvement varié.

Dans le mouvement uniforme, chaque molécule possède une vitesse constante, et toutes les sections présentent des phénomènes identiques quant à la loi de variation de leurs vitesses respectives. Cette définition implique la nécessité d'une section transversale et d'une pente invariables; il en résulte que les filets liquides ont des directions parallèles entre elles et au courant, et que ces directions sont rectilignes.

Le mouvement est varié lorsque la vitesse d'une molécule liquide change d'un point à un autre de sa trajectoire, et que la loi de variation des vitesses dans une section transversale quelconque n'est pas la même que dans les sections voisines. Ce mouvement a lieu si la pente ou la section du lit n'est pas invariable sur toute la longueur du canal considéré. Dès lors les divers filets du courant n'ont plus des vitesses parallèles et rectilignes; comme dans les tuyaux à section variable, il se produit des remous, des tourbillons qui absorbent une partie de la force vive que possède le liquide.

Le mouvement varié peut être permanent; dans ce cas, la vitesse et la pression sont supposées constantes par rapport au temps en un même point du cours d'eau.

b. Théorie ordinaire du mouvement varié permanent.

Les considérations que nous avons émises en B. § II. *b* du présent chapitre, pour les tuyaux de conduite, peuvent s'appliquer entièrement à la question du mouvement analogue dans les canaux découverts. Ici encore la plupart des hydrauliciens modernes, tels que Navier, Belanger, Bresse, etc., admettent que, dans toute section, les filets liquides sont sensiblement parallèles entre eux et à l'axe du courant. Il suit de là, que les forces engendrées par la viscosité ont encore, en chaque point, la direction de la vitesse; que, par conséquent, la pression varie suivant la loi hydrostatique, d'un point à un autre situé dans la même section, de façon que tous les points situés dans une section donnée ont le même niveau piézométrique; pour les ca-

naux découverts, ce niveau sera celui de la ligne d'eau dans le profil considéré si les colonnes piézométriques débouchent dans l'atmosphère, puisque la surface du courant est soumise à la pression atmosphérique.

Si donc l'on substitue au mouvement réel par filets d'inégale vitesse le mouvement par tranches de filets d'égale vitesse, l'équation différentielle du mouvement varié, dans les canaux découverts, sera représentée, comme au § II. *b*, par la relation :

$$d\theta = \frac{vdv}{g} + \frac{1}{g}\psi ds$$

qui devient, par approximation, suivant la théorie ordinaire :

$$d\theta = \frac{UdU}{g} + \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\chi}{\Omega} F(W) ds$$

puis, par une nouvelle approximation, non moins illicite :

$$d\theta = \frac{UdU}{g} + \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\chi}{\Omega} F(U) ds$$

et enfin, par une dernière inexactitude :

$$d\theta = \frac{UdU}{g} + \frac{\chi}{\Omega} \cdot b_1 U^2 ds \text{ ..... (P)}$$

en remplaçant la fonction de U du mouvement varié par celle du mouvement uniforme.

Si l'on désigne par U_2 et U_1 les vitesses moyennes pour $s = o$ et $s = L$, l'équation (P) devient par l'intégration :

$$\theta = \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} + b_1 \int_o^s \frac{\chi}{\Omega} U^2 ds \text{ ..... (Q)}$$

Cette dernière peut se mettre sous une autre forme en y exprimant les vitesses en fonction de la dépense par les relations :

$$Q = U\Omega = U_1\Omega_1 = U_2\Omega_2$$

l'on obtient ainsi :

$$\theta = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2}\right) + b_1 Q^2 \int_o^s \frac{\chi}{\Omega^3} ds \text{ ..... (R)}$$

Pour intégrer exactement l'expression $\int_o^s \frac{\chi}{\Omega^3} ds$, l'on devrait pou-

voir exprimer χ et Ω en fonction de la variable s; mais il sera généralement impossible d'établir de telles relations pour les lits des fleuves ou de certaines rivières dans lesquels χ et Ω présentent des variations irrégulières qu'on ne saurait exprimer analytiquement. Il faudra alors se contenter d'une nouvelle approximation. L'on peut, par exemple, considérer $\frac{\chi}{\Omega^3}$ comme l'ordonnée d'une courbe dont l'abscisse serait s; dès lors l'intégrale $\int_o^s \frac{\chi}{\Omega^3} ds$ représentera l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des s et les deux ordonnées limites correspondant à $s = o$ et $s = L$; la question sera réduite au calcul approximatif de l'aire ainsi déterminée.

c. Examen critique de la formule ordinaire du mouvement permanent varié; aperçu comparé des théories de Belanger, Navier, Coriolis, Dupuit, etc.

Si, dans la formule (P), l'on suppose U constant, ce qui est le caractère du mouvement uniforme, l'on en conclut : $UdU = o$, et, par suite :

$$d\theta = \frac{\chi}{\Omega} b_1 U^2 ds$$

$$\frac{d\theta}{ds} \quad \text{ou} \quad i = \frac{\chi}{\Omega} b_1 U^2 = \frac{1}{H} b_1 U^2$$

$$Hi = b_1 U^2$$

Ainsi, d'après la théorie ordinaire, la formule (P), qui représente le mouvement varié, ne diffère de celle du mouvement uniforme que par l'addition d'un terme proportionnel à l'augmentation de la force vive du produit du cours d'eau, depuis l'origine où $s = o$ jusqu'au point où $s = L$.

Nous avons vu, au § B. II. *b*, que, dans l'état actuel de la science, il est impossible d'évaluer exactement l'accroissement de force vive que prend une molécule, de masse m, entre deux sections distantes entre elles d'une longueur infiniment petite ds; ou bien, l'accroissement $\frac{vdv}{g}$ que prend $\frac{v^2}{g}$ pour chacune des molécules comprises entre

les sections considérées; que, par suite, la théorie ordinaire admet comme approximation le remplacement de $\frac{vdv}{g}$ par la différentielle de la hauteur due à la vitesse moyenne, c'est-à-dire par $\frac{UdU}{g}$. Cette hypothèse, suffisamment exacte pour le mouvement uniforme, est tout à fait inadmissible lorsqu'il s'agit du mouvement varié; celui-ci change d'une manière radicale la loi de distribution des vitesses entre les filets qui traversent une section. L'exemple suivant, donné par Dupuit, présentera un aperçu des variations que peut subir cette distribution dans les diverses sections comprises sur une longueur déterminée.

Supposons que dans la section transversale AB (fig. 55) d'un canal découvert, la courbe des vitesses soit représentée par *mn*, et que, de A en A′, la pente superficielle A′C, ou la chute qui s'opère à la surface liquide, soit égale à θ; cette chute a pour effet, ici, d'augmenter sensiblement la vitesse dans la section rétrécie A′B′. Désignant aussi par v et v' la vitesse respective d'une molécule dans les sections AB et A′B′, proposons-nous de construire la courbe $m'n'$ des vitesses dans cette dernière. Comme la pente i n'est jamais notable dans les cours d'eau naturels, les sections normales en A et A′ s'écarteront généralement très-peu des plans verticaux menés par ces points.

Démontrons d'abord que le travail de la pesanteur et de la pression sur une molécule liquide quelconque en mouvement est proportionnel à la chute θ de la surface; c'est-à-dire que, si aucune force retardatrice n'était engendrée dans ce mouvement, la force vive de chaque molécule s'augmenterait de celle qui est due à θ. Soit θ' la chute d'une molécule dans son passage de a en a'; (fig. 55) h_2' et h_1' les distances a'A et a'A′ à la surface pour ces deux positions. Le travail de la pesanteur étant proportionnel à θ', et celui de la pression à $h_2' - h_1'$, le travail de ces deux forces sera proportionnel à $\theta' + h_2' - h_1' = N$; mais comme l'on a par construction :

$$\theta' + h'_2 = \theta + h'_1$$

il en résulte :

$$\theta' + h'_2 - h'_1 = \theta$$

$$N = \theta$$

Si donc l'on désigne par v_2 et v_1 les vitesses de la molécule, la conclusion précédente permettra de poser :

$$\frac{1}{2g}(v_1^2 - v_2^2) = \theta$$

$$v_1 = \sqrt{2g\theta + v_2^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

A la rigueur, cette relation donne pour v_1 des valeurs un peu trop fortes, parce qu'une partie de la chute θ est employée à vaincre la résistance éprouvée par chaque filet. Mais, suivant Dupuit, cette résistance est insignifiante lorsque les sections sont assez rapprochées puisque, dans les cours d'eau naturels, elle n'absorbe que quelques centimètres de la chute par kilomètre; c'est ainsi qu'en les supposant distantes de 10^m il faudrait implicitement admettre une pente de $\frac{1}{1000}$ ou 1^m par kilomètre pour que la hauteur de chute, qui sert à augmenter la force vive, puisse être diminuée de $0,^m01$ par les résistances dues à la viscosité; or cette pente est supérieure à celle des grands fleuves.

Supposons, avec l'auteur, que θ soit égal à $0^m,16$ et que la perte produite par la cohésion et l'adhérence soit précisément $0^m,01$; la relation (a) deviendra :

$$v_1 = \sqrt{2g \times 0,16 + v_2^2} = \sqrt{2 \times 9,8088 + v_2^2}$$

$$v_1 = \sqrt{2,91 + v_2^2}.$$

Désignons par V_2 et V_1 les vitesses à la surface, dans les sections AB et A'B'; par W_2 et W_1 celles du fond; admettons aussi approximativement que W_2 soit égal à $\frac{V_2}{2}$. Il résultera de la formule précédente :

Pour $V_2 = 1^m$ $\qquad V_1 = 1^m98$

Pour $W_2 = 0^m50$ $\qquad W_1 = 1^m78$

Ainsi, pendant que la vitesse à la surface aurait à peine doublé, celle du fond aurait presque quadruplé; leur différence $V_2 - W_2$ était de 0,50, tandis que dans la section A'B' elle n'est plus que de 0,20; enfin le rapport $\frac{V_2}{W_2}$ égal à 2 s'est réduit à 1 pour $\frac{V_1}{W_1}$.

Par suite de ces différences de vitesse des filets, la force vive du produit d'un cours d'eau, entre deux sections, est plus grande que le produit de la masse par le carré de la vitesse moyenne. Il en résulte,

d'après M. *Coriolis*, que le premier terme de l'équation du mouvement varié doit être multiplié par un coefficient $\alpha' > 1$, dont la valeur peut atteindre 1,47.

Tout en reconnaissant la nécessité de cette correction, M. *Vauthier* a proposé de limiter à 1,10 la valeur de α', se basant, dans ses calculs, sur la loi de Dubuat qui restreint la différence des vitesses à mesure que la vitesse moyenne augmente. Le coefficient $\alpha' = 1,10$ est admis aujourd'hui par la généralité des hydrauliciens.

D'après Dupuit, qui, du reste, considère la loi de Dubuat comme entièrement fausse, la correction opérée en multipliant le premier terme par un coefficient constant α' ne pourrait être acceptée comme suffisamment exacte que dans l'hypothèse où la courbe des vitesses changerait suivant les mêmes lois que la vitesse elle-même ; mais, comme une augmentation de vitesse entraîne une diminution dans la différence des vitesses, ainsi que nous venons de le prouver, il s'ensuit que le système de correction employé actuellement est tout à fait vicieux, et que le coefficient α' doit être exprimé, en général, par une fonction des vitesses à la surface, au fond et sur les rives.

En supposant un canal d'une grande largeur, Dupuit trouve, pour α', l'expression suivante :

$$\alpha' = 1 + \left(\frac{V - W}{2U}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{V - W}{U}\right)^2$$

Admettant ensuite la relation :

$$U = \frac{2V + W}{3} = 0,67\,V + \frac{W}{3} \quad \text{.....} \quad (L)$$

obtenue en faisant $m = 1$ dans notre formule (f), il en conclut :

$$\alpha' = 1 + \frac{9}{4}\left(\frac{V}{U} - 1\right) \quad \text{.....} \quad (T)$$

Cette relation prouve donc que α' ne saurait être constant que dans le cas où $\frac{V}{U}$ le serait ; mais, comme cette condition n'est nullement remplie lorsqu'il s'agit de calculer, dans le mouvement varié, la force vive du produit d'un cours d'eau entre deux sections rapprochées, il faut changer la valeur de α' pour les deux sections, en substituant,

dans la relation (T), la valeur du rapport $\frac{U}{V}$ qui est relatif à chacune d'elles.

L'hypothèse de $\frac{U}{V}$ constant peut convenir approximativement dans le calcul de la force vive pour le mouvement uniforme; si l'on suppose alors pour ce rapport la valeur constante 0,80, l'on obtient par la formule (T) :

$$\alpha' = 1,14$$

qui se rapproche beaucoup du coefficient généralement admis.

De l'exemple cité plus haut et des considérations qui l'accompagnent il résulte que la différence entre les forces vives dans deux sections voisines doit être multipliée par un coefficient *spécial* α'', tout à fait indépendant et différent de α'. Suivant Dupuit, la valeur de ce coefficient spécial est donnée par l'équation :

$$\alpha'' = 1 - \left(\frac{V_2 - W_2}{2\,U_1}\right)^2 = 1 - \left(\frac{V_2 - W_2}{2\,U_2}\right)^2 \frac{U_2^2}{U_1^2} \quad \text{.....} \quad (V)$$

Or, d'après la formule (L) du même auteur, la valeur du rapport $\frac{U}{V}$ est comprise entre 0,67 et 1 ; celle de $\frac{V}{U}$ varie donc de 1,50 à 1. Par suite, la valeur de α', tirée de la formule (T), est limitée entre 1,56 et 1 ; et le terme $\left(\frac{V_2 - W_2}{2\,U_2}\right)^2$ de l'équation (V) a pour limite supérieure 0,56.

Ainsi, la valeur de α'' reste comprise entre 0,44 et 1, lorsqu'il y a pente de l'amont à l'aval, c'est-à-dire, quand la vitesse U_1 de la section d'aval est plus grande que la vitesse U_2 de celle d'amont; elle peut descendre en dessous de 0,44 pour $U_2 > U_1$, sans toutefois devenir nulle.

En résumé, des considérations que nous venons de développer, l'on peut tirer les conclusions suivantes relativement à l'application des formules du mouvement varié aux phénomènes des cours d'eau naturels.

1° Il est impossible de déterminer la variation qui se présente dans la distribution des vitesses pour deux sections très-rapprochées; l'expression de la force vive dans chacune d'elles ne saurait donc être cal-

culée que plus ou moins approximativement ; et, comme une légère erreur dans l'évaluation de deux quantités peut en donner une très-grande dans leur différence, il serait illusoire de songer à évaluer cette différence avec un degré d'approximation convenable.

2° Les sections des grands cours d'eau naturels étant, en général, fort irrégulières, il est indispensable d'établir les calculs sur des sections très-rapprochées ; force est donc de tomber dans les difficultés précitées.

3° Lorsque les sections sont assez régulières pour qu'on puisse conserver entre celles que l'on considère une certaine distance finie L, l'on peut, au moyen de la formule (Q), convenablement corrigée, résoudre avec une exactitude suffisante les problèmes en rapport avec cette hypothèse. En effet, dans cette formule mise sous la forme :

$$\theta = \frac{U_1^2 - U_2^2}{2g} + \int_0^L \psi ds$$

le premier terme a une valeur limitée par les valeurs extrêmes que peuvent prendre U_1 et U_2 ; et, comme la différence entre U_1 et U_2 n'est jamais considérable, ce terme ne dépassera guère quelques centimètres ; son influence sera donc très-insignifiante par rapport à la valeur de $\int_0^L \psi\, ds$, qui peut atteindre une limite quelconque lorsque les sections sont éloignées.

d. Discussion de la courbe affectée par la surface des cours d'eau ; courbes et tables de remous.

I°. *Considérations générales et définitions.*

Dans les rivières comme dans les canaux, la masse liquide se meut sans solution de continuité ; il suit de là que, par chacune des sections faites perpendiculairement au courant, il passe un même volume d'eau dans un même temps ; par conséquent, la vitesse des molécules, à leur passage par les diverses sections, est en raison inverse de l'aire de ces dernières.

Pour les canaux, où la section et la pente sont d'ordinaire constantes, le mouvement est uniforme et la courbe longitudinale de la

surface liquide se réduit à une ligne droite parallèle au fond du lit; on lui donne généralement la dénomination de : *ligne du régime uniforme.*

Dans les cours d'eau naturels, cette courbe est sujette à de grandes variations suivant les pentes et les sections de la masse liquide. Supposons, par exemple, que la pente d'une rivière, après s'être maintenue constante sur une certaine longueur, vienne à augmenter sans que la largeur du lit change; la hauteur de la section liquide diminuera, en vertu du principe que nous venons de tirer de la continuité des fluides. Mais, comme cette diminution de hauteur ne pourra se faire d'une manière brusque, la surface du courant présentera, dans cette partie, une forme convexe, et le mouvement y sera accéléré. L'inverse aura lieu évidemment pour une diminution dans la pente ; la courbe sera concave et le mouvement retardé. L'on pourra même parfois obtenir une contre-pente à la surface, sur une petite étendue, c'est-à-dire une inclinaison opposée à celle du lit.

Les variations dans la largeur des sections produisent des résultats analogues à ceux qui résultent de modifications dans la pente.

L'on peut conclure de ce qui précède : 1° que la coupe longitudinale de la surface d'un cours d'eau présente une suite de lignes droites, plus ou moins courtes, réunies par des portions de courbes, plus courtes encore, et tantôt concaves tantôt convexes; 2° qu'un mouvement retardé correspond aux premières courbes, et un mouvement accéléré aux secondes; 3° que les inégalités de cette coupe correspondent à celles du lit, mais qu'elles sont moins fortes que ces dernières.

L'on désigne sous le nom de *courbes de remous,* les parties convexes ou concaves qui, dans les cours d'eau naturels, sont produites soit par des élargissements ou des rétrécissements du lit, soit par des accroissements ou des diminutions de la pente, et qui se raccordent, ainsi que nous venons de le dire, à une suite de lignes droites correspondant au régime uniforme. Dans le premier cas il y a *remous d'abaissement;* il y a *remous de gonflement* dans le second. Les problèmes ordinaires que l'on est appelé à résoudre se rapportent à ce dernier; aussi l'on appelle vulgairement *remous* tout exhaussement de la surface du courant au-dessus de la ligne du régime uniforme; ex-

haussement qui est produit la plupart du temps par un obstacle et qui, en se propageant vers l'amont, semble accompagné d'un rebroussement du liquide contre la direction de la rivière. L'on désigne par *hauteur* du remous l'exhaussement maximum *mn* ou *mn'* (fig. 56) au-dessus de la ligne ABC du régime uniforme; son *amplitude* *n*A ou *m*A est la distance à laquelle il se propage. L'on désigne aussi sous le nom *d'amplitude hydrostatique* la longueur *n*B ou *m*B obtenue en menant une horizontale par le point culminant *m*.

En général, le remous d'exhaussement ou de gonflement est produit soit par une digue ou un déversoir qui barre entièrement le cours d'eau, soit par un obstacle partiel, tel qu'une jetée ou les piles d'un pont. En traitant la question des remous, nous examinerons spécialement les variations de la courbe dans l'hypothèse d'un obstacle continu.

II° *Discussion de la courbe du courant, pour le mouvement varié permanent et dans un canal régulier.*

Nous supposerons dans nos calculs que la section du canal soit un rectangle prismatique invariable mais de largeur finie, et que la pente i soit constante.

Soient :

i le sinus de la pente du fond, comptée positivement lorsque celui-ci monte et négativement lorsqu'il descend;

L la demi-largeur du cours d'eau;

q le produit ou la dépense du cours d'eau par mètre de largeur $= \frac{Q}{2L} = hu$;

h la hauteur variable comptée au-dessus du fond;

s la distance de la section considérée à une autre prise pour origine. Cette origine est supposée en amont; par conséquent les distances s sont comptées positivement de l'amont à l'aval.

Reprenons l'équation (P) généralisée du mouvement varié :

$$d\theta = \frac{udu}{g} + \frac{L+h}{Lh}(\alpha u + \beta u^2)\, ds \text{ ..... } (P')$$

En supposant que AB et CB′ soient deux sections infiniment rapprochées (fig. 57), les notations de la figure donnent la relation :

$$h_1 = h + B'b + d\theta = h + ids + d\theta$$

D'où :

$$d\theta = h_1 - h - ids = -dh - ids$$

Remplaçant dans l'équation (P′) $d\theta$ par cette valeur et u par $\frac{q}{h}$, nous obtiendrons :

$$ds = \frac{\left(\frac{q^2}{g} - h^3\right) dh}{h^3 i + \frac{L+h}{L}(\alpha q h + \beta q^2)} \quad \text{.....} \quad (X)$$

Cette équation représente la courbe de la surface de l'eau dans un courant permanent régulier quelconque, quelle que soit l'inclinaison i, et les dimensions de la section liquide. Il serait inexact d'en conclure que, dans tous les cas, la courbe qu'elle représente reste la même; celle-ci varie au contraire dans sa forme suivant la valeur numérique des coefficients, tout aussi bien que les sections coniques qui sont aussi représentées par une équation générale du second degré.

Si, dans la relation (X), l'on remplace q par sa valeur approximative Uh, il en résulte :

$$ds = \frac{\left(\frac{U^2}{g} - h\right) dh}{hi + \frac{L+h}{L}(\alpha U + \beta U^2)}$$

Posant en outre : $\alpha U + \beta U^2 = b_1 U^2$, l'on en conclut :

$$ds = \frac{\left(\frac{U^2}{g} - h\right) dh}{hi + \frac{L+h}{L} b_1 U^2} \quad \text{ou bien} \quad \frac{L\left(\frac{U^2}{g} - h\right) dh}{Lhi + b_1 U^2 (L+h)} \quad \text{.....} \quad (Y)$$

Nous allons discuter l'équation différentielle sous cette dernière forme.

1° Soit $i = 0$, c'est-à-dire un fond horizontal.

L'inclinaison de la tangente à la courbe est représentée, dans ce cas, par :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{b_1 U^2 (L+h)}{L\left(\frac{U^2}{g} - h\right)} \quad \text{.....} \quad (Z)$$

Ainsi, la tangente est positive, c'est-à-dire inclinée de l'aval vers l'amont, pour $h < \frac{U^2}{g}$; elle est infinie pour $h = \frac{U^2}{g}$, qui correspond à $i = 90°$; et négative pour $h > \frac{U^2}{g}$. En outre, pour des valeurs de h supérieures à $\frac{U^2}{g}$, valeurs qui rendent négatif le rapport $\frac{dh}{ds}$, l'inclinaison de la tangente diminue de plus en plus, de sorte que vers l'amont la courbe (fig. 58) se rapproche de l'horizontale. Sa tangente verticale, en m, est déterminée par $h = \frac{U^2}{g}$; et celle du point m' où la courbe rencontre le fond, est égale à b_1g, valeur que l'on obtient en faisant $h = 0$ dans l'expression de $\frac{dh}{ds}$. La courbe aurait donc en mm' une partie concave pour laquelle les tangentes seraient positives, et qui reviendrait en sens contraire du courant. Ce phénomène est évidemment impossible ; arrivée en m l'eau ne peut que tomber verticalement ; il n'y a donc pas lieu de considérer la branche qui correspond à cette solution du problème.

L'intégration de l'équation différentielle (Z), donnera tous les points de la courbe mCA. A cet effet, décomposons, avec Dupuit, le dénominateur de dh en deux fractions du premier degré, après avoir fait $i = 0$ dans l'équation (X) ; nous aurons :

$$ds = L\left(\frac{q^2}{g} - h^3\right)\frac{dh}{(L+h)(\alpha qh + \beta q^2)}$$

$$\frac{1}{(L+h)(\alpha qh + \beta q^2)} = \frac{1}{\alpha q\left(L - \frac{\beta}{\alpha}q\right)}\left(\frac{1}{h + \frac{\beta}{\alpha}q} - \frac{1}{h+L}\right)$$

Le facteur $\alpha qh + \beta q^2$ se compose de deux termes, dont l'un varie avec h et dont l'autre est constant. Mais comme α est beaucoup plus petit que β, les diverses valeurs que pourra prendre le terme αqh, par suite des variations de h, ne donneront chaque fois que des différences insignifiantes dans les valeurs correspondantes du facteur $\alpha qh + \beta q^2$. Si donc, l'on appelle h' une valeur moyenne de h dans la partie du cours d'eau considérée, l'on peut remplacer approximativement

$\alpha qh + \beta q^2$ par le facteur constant $\alpha qh' + \beta q^2 = C$. L'on obtient alors en intégrant :

$$s + C' = \frac{L}{C}\left[\left(\frac{q^2}{g} + L^3\right)\log.\left(1 + \frac{h}{L}\right) - \frac{h^3}{3} + \frac{Lh^2}{2} - L^2h\right]$$

L'on déterminera la constante C' en faisant, dans cette équation, $s = 0$ et $h = h_1$ dans l'hypothèse où h_1 représente la hauteur du cours d'eau au point de l'amont où l'on commence à compter les distances. L'on aura ainsi :

$$s = \frac{L}{C}\left[\left(\frac{q^2}{g} + L^3\right)\log.\left(\frac{L+h}{L+h_1}\right) - \left(\frac{h^3 - h_1^3}{3}\right)\right.$$
$$\left. + L\left(\frac{h^2 - h_1^2}{2}\right) - L^2(h - h_1)\right] \text{ ..... } (a)$$

Si, dans la valeur de C, l'on remplace q par $U'h'$, où U' désigne la vitesse moyenne correspondant à h', l'on en tire :

$$C = \alpha h' \times U'h' + \beta U'^2h'^2 = h'^2(\alpha U' + \beta U'^2)$$
$$C = b_1U'^2h'^2$$

et, par suite :

$$s = \frac{L}{b_1U'^2h'^2}\left[\left(\frac{U'^2h'^2}{g} + L^3\right)\log.\left(\frac{L+h}{L+h_1}\right) - \left(\frac{h^3 - h_1^3}{3}\right)\right.$$
$$\left. + L\left(\frac{h^2 - h_1^2}{2}\right) - L^2(h - h_1)\right] \text{ ..... } (b)$$

ou bien encore :

$$s = \frac{L}{b_1q^2}\left[\left(\frac{q^2}{g} + L^3\right)\log.\left(\frac{L+h}{L+h_1}\right) - \left(\frac{h^3 - h_1^3}{3}\right)\right.$$
$$\left. + L\left(\frac{h^2 - h_1^2}{2}\right) - L^2(h - h_1)\right] \text{ ..... } (c)$$

Ces équations se simplifient beaucoup lorsque le cours d'eau est assez large pour qu'on puisse considérer le rapport $\frac{L}{L+h}$ comme sensiblement égal à l'unité.

Ainsi la relation (X) devient, pour $i = 0$ et $\frac{L+h}{L} = 1$:

$$ds = \frac{\left(\frac{q^2}{g} - h^3\right)dh}{\alpha qh + \beta q^2}$$

et l'équation (a) de la courbe se réduit à :

$$s + C' = \frac{1}{C}\left(\frac{q^2}{g}h - \frac{1}{4}h^4\right)$$

qui représente une *parabole* du 4e degré.

2° Supposons que i soit positif, ce qui correspond à un fond incliné en sens inverse du courant.

Les équations (X) et (Y) donnent pour l'inclinaison de la tangente les expressions :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{ih^3 + \frac{L+h}{L}(\alpha qh + \beta q^2)}{\frac{q^2}{g} - h^3}$$

et :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{Lhi + b_1U^2(L+h)}{L\left(\frac{U^2}{g} - h\right)}.$$

L'une et l'autre présentent, pour la courbe, les mêmes caractères généraux que dans le cas où $i = 0$, c'est-à-dire pour un fond horizontal : la grande branche ACm (fig. 58) reste concave jusqu'en m, où $h = \frac{U^2}{g}$, et sa tangente se rapproche de l'horizontale vers l'amont.

Ainsi, quand le fond du lit est horizontal ou en contre-pente, l'eau présente toujours une surface convexe qui se termine par une croupe brusquement arrondie.

3° Soit enfin i négatif; l'inclinaison du lit est alors dans le sens du courant.

Ce cas est celui des cours d'eau naturels; leur fond étant généralement peu accidenté, l'on peut, entre deux points quelconques pour lesquels la vitesse moyenne U est la même, substituer à ce fond réel une droite fictive donnant la même résistance par mètre courant, et ayant, entre ces deux points, la pente de la surface. Dès lors, le mouvement étant uniforme, la profondeur H du cours d'eau, dont la section est supposée rectangulaire, sera donnée par l'équation :

$$Hi = \alpha U + \beta U^2 = b_1U^2$$

$$H = \frac{b_1U^2}{i}$$

C'est pour un pareil lit que nous traiterons plus loin la question des remous; nous supposerons que, par l'effet de travaux quelconques, l'eau y soit soulevée ou abaissée par rapport à la hauteur H du régime uniforme, et nous déterminerons la courbe de la nouvelle surface.

III°. *Problèmes.*

1° Étant donné, pour la section liquide, un trapèze ayant $1^m,20$ au fond et 1,40 à la surface; et pour dépense du courant une quantité $Q = 0,60$, trouver la distance entre $h_1 = 1^m,60$ et $h = 0,60$. Le fond du lit est censé horizontal.

Pour résoudre ce problème, l'on prendra l'équation (*c*), et l'on y remplacera L, h, h_1, q et b_1 par leur valeur :

$$s = \frac{L}{b_1 q^2}\left[\left(\frac{q^2}{g} + L^3\right)\log.\left(\frac{L+h}{L+h_1}\right) - \left(\frac{h^3 - h_1^3}{3}\right) + L\left(\frac{h^2 - h_1^2}{2}\right) - L^2(h - h_1)\right]$$

$$L = \frac{1}{2} \times \frac{1,20 + 1,40}{2} = 0,65 \quad L + h = 1,25 \quad L + h_1 = 2,25$$

$$q = \frac{Q}{2L} = \frac{0,60}{1,30} = 0,46 \quad b_1 = 0,0004$$

2° Étant donné pour q et L les mêmes valeurs que précédemment, ainsi que la hauteur $h = 0,50$ d'un point C de la courbe (fig. 58); trouver la hauteur h_1 de celle-ci à 4000^m en amont du point précédent. Le fond du lit est encore censé horizontal.

Le moyen le plus simple est d'opérer par tâtonnement; au lieu de résoudre l'équation (*c*) par rapport à h, il suffit d'y substituer une valeur arbitraire pour cette inconnue et de voir si la valeur résultante de s se rapproche de 4000^m.

Supposons, par exemple, qu'en donnant à h la valeur arbitraire 1,80 l'on obtienne 4300 environ, tandis que $h = 1,70$ ne donnerait que 3800; comme ces deux ordonnées appartiennent aussi à la courbe, on peut considérer celle-ci comme à peu près droite entre elles, puis rechercher par proportion la hauteur h qui correspond à $s = 4000^m$; cette hauteur sera ici comprise entre 1.70 et 1.80.

IV°. *Courbes et tables de remous.*

Reprenons le cas de la fig. 56, pour lequel i est négatif, et qui se rapporte à un cours d'eau naturel barré entièrement par une digue ou un déversoir dD.

Par suite de cet obstacle, l'eau qui coulait d'abord d'une manière uniforme, et dont la ligne de surface ABC était parallèle au fond, s'élève à partir d'un certain point d'origine en amont, et sa courbe de surface s'éloigne de plus en plus de la droite du régime uniforme, jusqu'à un point culminant m du gonflement situé à une très-petite distance de la digue dD ; le liquide se déverse alors au-dessus de cette dernière.

Si l'on désigne par h la hauteur ad du point m au-dessus du déversoir, par H la profondeur nn'' ou approximativement bD du régime uniforme, et par h' la hauteur dD de l'obstacle, la hauteur mn ou mn' ou ab du remous sera représentée par $h + h' - \mathrm{H}$, expression dans laquelle h correspond à la quantité H tirée de la formule (a) des déversoirs :

$$\mathrm{Q} = 0{,}405\ \mathrm{LH}\sqrt{2g\mathrm{H}}$$

Dubuat est le premier auteur qui se soit occupé de la forme et de l'étendue des remous; ses observations le portèrent à conclure que la courbe de leur surface est concave vers l'extérieur, et qu'elle diffère très-peu d'un arc de cercle. Après avoir prouvé que la théorie de Dubuat péchait par excès, Funck admit gratuitement que les courbes des remous de gonflement sont des arcs de paraboles dont le sommet serait sur la surface du courant à une distance du barrage égale à deux fois l'*amplitude hydrostatique*, et dont le paramètre serait $\frac{1}{2}(h + h' - \mathrm{H})\ i$.

Sans admettre ces conclusions, les hydrauliciens regardaient cependant la surface d'un remous de gonflement comme concave vers l'extérieur, et ils la supposaient généralement plus longue que l'amplitude hydrostatique. Mais en 1820, un savant piémontais, M. *Bidone*, prouva par des expériences qu'il peut se produire des remous à surface presque plane et horizontale ou faiblement convexe, plus courte

que l'amplitude hydrostatique, et qui se réunit à la surface du courant par une courbe convexe brusque formant *ressaut* à la superficie du liquide. Voici entre autres un cas particulier, très-intéressant, décrit par cet auteur.

Après avoir disposé un canal en maçonnerie, à section rectangulaire, dont le fond avait une inclinaison de $0,^{m}023$ par mètre, et dont les parois verticales étaient distantes de $0,^{m}325$, il y fit couler de l'eau de façon à obtenir une dépense de $0,^{m3}0351$ par seconde. A ce débit correspondait une hauteur H constante, de régime uniforme, égale à $0^{m},064$. Ces dispositions prises, Bidone établit dans le cours d'eau un barrage continu tel que la profondeur s'élevât à $0^{m},28$ en un point situé à $1^{m},00$ en arrière (fig. 59); il en advint le résultat suivant : le régime uniforme subsistait encore jusqu'à $4^{m},50$ en amont du barrage; puis, la hauteur prenant un accroissement brusque s'élevait à environ $0^{m},18$, le triple de sa valeur primitive; l'eau continuait ensuite à couler sans agitation et avec une surface légèrement convexe jusqu'au barrage, par dessus lequel elle se déversait.

L'accroissement brusque de hauteur AB — *ab*, ainsi produit, sans inégalité du fond, dans un canal prismatique, porte le nom de *ressaut superficiel*, ou simplement de *ressaut*.

D'après MM. Bélanger et Bresse, le phénomène du ressaut serait un cas exceptionnel de la formule fondamentale du mouvement permanent varié, attendu que les conditions analytiques de son existence sont incompatibles avec l'hypothèse des filets parallèles, sur laquelle cette formule repose. De là l'impossibilité d'appliquer, dans ce cas, la théorie ordinaire à la courbe du remous. Les premières recherches sur cette question sont dues à M. Bélanger. Déjà, en 1827, dans son *Essai sur le mouvement des eaux courantes*, il avait proposé, pour le calcul des courbes à ressaut, une formule basée sur l'hypothèse que l'on peut, dans l'examen de ce phénomène, négliger les pertes de charge. En 1838 il exposa une nouvelle théorie en partant du principe des quantités de mouvement projetées. Cette théorie, que M. Bresse considère comme plus rationnelle que la première, et qu'il reproduit dans son *Cours de mécanique appliquée*, ne nous semble mériter aucune confiance, par suite de l'appréciation inexacte de la différence des forces vives dans deux tranches très-rapprochées. Nous renvoyons,

pour ce sujet, à ce que nous avons déjà exposé au § B. II. *b* et au § C. II. *c*.

Dans son ouvrage sur le *Mouvement des eaux courantes*, publié en 1848, M. Dupuit établit que les remous à ressaut dépendent de la pente i du cours d'eau; qu'ils ne se produisent que dans les cas fort rares où i est supérieur à $3^m,50$ par kilomètre, et qu'enfin ils ne peuvent jamais se présenter dans les rivières ou les fleuves, même les plus impétueux, puisque la pente de ceux-ci se trouve bien en dessous de cette limite. C'est ce que nous allons développer.

Reprenons le troisième cas du § *d*. II°, pour lequel i est négatif; c'est-à-dire l'inclinaison du lit parallèle au courant. Changeons i en $-i$ dans l'équation différentielle :

$$ds = \frac{\left(\frac{q^2}{g} - h^3\right) dh}{h^3 i + \frac{L+h}{L}(\alpha q h + \beta q^2)}$$

l'inclinaison $\frac{dh}{ds}$ de la tangente à la courbe résultante sur la ligne du régime uniforme sera donc :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{ih^3 - \frac{L+h}{L}(\alpha q h + \beta q^2)}{h^3 - \frac{q^2}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Afin de simplifier cette relation, négligeons α par rapport à β et $\frac{h}{L}$ par rapport à 1. Il serait facile de prouver que ces hypothèses ne modifient pas les propriétés de la courbe; du reste, il ne s'agit ici que d'étudier la forme générale de cette dernière. Nous aurons donc :

$$\frac{dh}{ds} = \frac{ih^3 - \beta q^2}{h^3 - \frac{q^2}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Pour éliminer q de cette équation, posons les deux relations du régime uniforme :

$$q = UH \quad \text{et} \quad Hi = \alpha U + \beta U^2 = \beta U^2$$

Il en résulte :

$$q^2 = U^2H^2 \quad \text{et} \quad H^3 i = \beta U^2 H^2 = \beta q^2$$

et l'équation (2) devient :

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{\frac{h^3}{H^3} - 1}{\frac{h^3}{H^3} - \frac{U^2}{gH}} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Ayant tracé la ligne AαA′ parallèle à XY et à une distance H de celle-ci, donnons à h, dans l'équation (3), des valeurs inférieures à H, ce qui correspondra au remous d'abaissement.

Dans ce cas, remarquons que $\frac{dh}{ds}$, tout en restant négatif, devient d'autant plus petit que h se rapproche davantage de H, et qu'il devient nul pour $h = H$; il suit de là que la courbe vers l'amont se rapproche de plus en plus de la surface naturelle du courant, et que ces deux lignes sont asymptotes entre elles. Si l'on fait décroître peu à peu l'ordonnée variable h, l'inclinaison de la tangente sur le fond va en croissant, et $\frac{dh}{ds}$ finit par devenir infini pour la relation $h = \sqrt[3]{\frac{U^2H^2}{g}}$, valeur que nous supposerons inférieure à H. La courbe a donc quelque part, en m, une tangente perpendiculaire au fond, et telle que sa distance mn soit égale à $\sqrt[3]{\frac{U^2H^2}{g}}$.

A partir du point m la courbure change et devient concave vers l'extérieur, comme pour le cas de $i = 0$ et de $i > 0$, produisant ainsi une branche dont il est inutile de s'occuper.

La courbe Bbm représente donc le remous d'abaissement, c'est-à-dire que, si, par l'effet d'une modification quelconque du lit, la surface naturelle du régime uniforme est abaissée de a en b à l'un de ses points, la partie aA de cette surface sera abaissée en Bb.

Cherchons maintenant la courbe du remous de gonflement; à cet effet, donnons à h des valeurs plus grandes que H dans l'équation (3). Dès lors $\frac{dh}{ds}$ devient positif; la courbe est donc convexe vers le fond. A mesure que h diminue et se rapproche de H, la branche vers l'amont tend à se raccorder avec la ligne du régime uniforme; elle lui est encore asymptote puisque $\frac{dh}{ds} = 0$ pour $h = H$. Vers l'aval, l'incli-

naison de la tangente sur le fond va en croissant avec h, et elle tend indéfiniment vers une valeur limite égale à i, c'est-à-dire vers un point de la courbe tel que la tangente y soit horizontale.

La courbe CcC′ s'appelle le remous de gonflement ou d'exhaussement; elle représente en cC ce que deviendrait par exemple la partie aA de la surface naturelle d'un cours d'eau lorsque celle-ci est soulevée de a en c, à un point quelconque a de sa ligne primitive.

Il est important de remarquer que, pour un cours d'eau déterminé par sa pente i et sa hauteur H, il n'existe qu'*une seule courbe de remous;* celle-ci, une fois connue, détermine tous les remous qu'on peut avoir à considérer sur ce courant. Supposons, par exemple, qu'un barrage ait soulevé de $1^m,00$ en c' les eaux qui primitivement suivaient la ligne $Aa''aa'$ du régime uniforme, et qu'aux points c et c'' les ordonnées ca et $c''a''$ de l'exhaussement soient égales respectivement à $0^m,80$ et à $0^m,60$. Si l'on demandait de construire la courbe d'exhaussement produite par un barrage établi en a'', et tel qu'en ce point a'' le niveau soit relevé de 0,60, l'on obtiendrait évidemment la portion $c''C$ de la grande branche $Cc''cc'C'$; cette partie de courbe en amont du remous $0^m,60$ appartient donc non-seulement à ce remous spécial mais encore à celui de $0^m,80$ comme à celui de $1^m,00$, qui ne sont tous que *l'amont d'un remous plus grand.* Ainsi c'est à tort que, dans presque tous les traités d'hydraulique, l'on a considéré la courbe des remous comme ayant son origine au point où les travaux avaient occasionné le plus fort exhaussement. Quoiqu'on ne cherche généralement que le remous en amont des barrages, l'analyse donne la forme de la courbe entière jusqu'à la limite asymptotique de l'aval.

Dans l'examen qui précède, nous avons admis l'hypothèse de $\sqrt[3]{\frac{U^2H^2}{g}} < H$, ce qui revient à supposer $\frac{U^2}{gH} < 1$. Cette condition peut encore s'exprimer autrement : en effet, si l'on pose avec Dupuit l'équation

$$Hi = \beta U^2$$

l'on en tire :

$$\frac{U^2}{H} = \frac{i}{\beta}$$

$$\frac{U^2}{gH} = \frac{i}{g\beta}$$

et la condition ci-dessus devient $i < g\beta$; ou bien, en remplaçant β par 0,00036 :

$$i < 0{,}0035$$

Ainsi, d'après Dupuit, l'on peut tirer les conclusions suivantes : 1° Dans tous les cours d'eau dont la pente est inférieure à $0^m{,}0035$ par mètre, les courbes de remous ont la forme trouvée plus haut, et leur raccordement vers l'amont se fait d'une manière asymptotique avec la ligne du régime uniforme. Quant au raccordement vers l'aval, il a lieu, pour le remous de dépression, par une partie verticale d'autant plus grande que i est plus considérable; dans le remous de gonflement la courbe s'éloigne au contraire de la ligne du régime uniforme, et tend à devenir horizontale à l'infini. 2° Lorsque $i = 0^m{,}0035$, la courbe du remous de gonflement est une horizontale; celle du remous d'abaissement n'offre plus de courbe de raccordement vers l'aval ; celui-ci s'opère par une chute brusque. 3° Au-dessus de $i = 0{,}0035$ le calcul donne pour la courbe de dépression une forme qui ne peut se produire dans la réalité; quant à la surface du remous d'exhaussement elle devient alors convexe vers l'extérieur, et se raccorde avec la ligne du régime uniforme par une croupe qui forme ressaut.

Si dans la condition $i < g\beta$ l'on substitue b_1 à β, en donnant à b_1 la valeur 0,0004 adoptée par Tadini, Bresse, etc., l'on ne modifie en rien l'ensemble des conclusions de Dupuit attendu qu'une pente de $0^m{,}004$ par mètre est encore de beaucoup supérieure à celle des cours d'eau navigables.

Il nous reste à établir l'équation générale de la courbe des remous par l'intégration de la relation différentielle (1). Ainsi que nous l'avons dit, Dupuit est le premier qui ait opéré l'intégration de l'équation différentielle du mouvement permanent varié, et qui en ait déduit, pour un grand nombre de cas pratiques, des formules simples faciles à calculer. Nous suivrons ici sa méthode. A cet effet, remplaçons dans l'équation (1) $\frac{q^2}{g}$ par $\frac{H^2U^2}{g}$ et βq^2 par $\frac{LH^3 i}{L+H} - \alpha qH$; nous aurons :

$$ids = \frac{\left(h^3 - \frac{H^2U^2}{g}\right) dh}{(h - H)\left\{h^2 + hH\left(1 - \frac{\alpha U}{Li}\right) + H^2\left(\frac{L}{L+H} - \frac{\alpha U}{Hi}\right)\right\}}$$

Il est plus commode, pour la pratique, de compter les ordonnées des courbes d'exhaussement et de dépression à partir de la ligne du régime uniforme; pour introduire cette hypothèse dans l'équation précédente il suffit d'y remplacer respectivement h par $H + y$ ou par $H - y$; l'on substitue ainsi à la variable h une nouvelle variable y.

Supposons qu'il s'agisse du remous d'exhaussement; nous aurons par la substitution de $H + y$ à h :

$$i\frac{ds}{dy} = \frac{H^2\left(1 - \frac{U^2}{gH}\right) + y^3 + 3Hy^2 + 3H^2y}{y\left\{y^2 + 3Hy\left(1 - \frac{\alpha U}{3Li}\right) + 3H^2\left(1 - \frac{H}{3(L+H)} - \frac{(L+H)\alpha U}{3LHi}\right)\right\}}$$

Pour simplifier les calculs, négligeons la quantité $\frac{\alpha U}{3Li}$ qui est toujours très-petite, même dans les canaux étroits; posons ensuite :

$$m = 1 - \frac{U^2}{gH} \quad \text{et} \quad n = 1 - \frac{H}{3(L+H)} - \frac{\alpha U(L+H)}{3HLi}$$

Or, il est facile de s'assurer que le dernier terme $\frac{\alpha U(L+H)}{3HLi}$ de la valeur de n peut aussi être négligé dans la pratique : il suffit d'y remplacer Hi par $\alpha U + \beta U^2$, et de considérer alors comme négligeable l'expression αU en comparaison de βU^2. L'on voit du reste que la valeur de n est toujours comprise entre $\frac{2}{3}$ et 1, pour toutes les valeurs de L, depuis zéro jusqu'à l'infini. Cela admis, nous aurons, en décomposant en facteurs la fraction rationnelle :

$$i\frac{ds}{dy} = 1 + \frac{mH}{3n}\left\{\frac{1}{y} - \frac{y + \frac{3}{2}H}{\left(y + \frac{3}{2}H\right)^2 + \left(3n - \frac{9}{4}\right)H^2} - \frac{\left(\frac{3}{2} - 9\frac{n(1-n)}{m}\right)H}{\left(y + \frac{3}{2}H\right)^2 + \left(3n - \frac{9}{4}\right)H^2}\right\}$$

qui représente l'équation différentielle de la courbe de gonflement rap-

portée à la surface naturelle ou du régime uniforme. Il vient par l'intégration :

$$is + C = y + \frac{mH}{3n}\left\{\frac{1}{2}\log.\left(\frac{y^2}{y^2+3Hy+3nH^2}\right) - \frac{\frac{3}{2} - 9\frac{(n1-n)}{m}}{\sqrt{3n-\frac{9}{4}}}\right.$$

$$\left.\times \text{arc}\left(\text{tang.} = \frac{y+\frac{3}{2}H}{H\sqrt{3n-\frac{9}{4}}}\right)\right\}$$

La condition de $s = 0$ pour $y = Y$ quantité connue, déterminerait la constante C. Par suite l'on obtiendrait une équation en s et y qui serait celle du remous de gonflement. Mais, pour éviter la recherche des arcs tangentes dans les tables trigonométriques, remplaçons l'arc par son développement en série; nous aurons, en désignant $y + \frac{3}{2}H$ par x et $H\sqrt{3n - \frac{9}{4}}$ par A :

$$\text{Arc}\left(\text{tang.} = \frac{x}{A}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{x} + \frac{A^3}{x^3} \ldots\ldots\ldots$$

Comme cette série sera presque toujours assez convergente pour qu'on puisse en négliger le deuxième terme, l'intégrale deviendra :

$$is + C = y + \frac{mH}{3n}\left\{\frac{1}{2}\log.\left(\frac{y^2}{y^2+3Hy+3nH^2}\right) + \frac{\frac{3}{2} - 9\frac{n(1-n)}{m}}{y+\frac{3}{2}H}\right\} \ldots\ldots\ldots (4)$$

Telle est l'équation générale de la courbe du remous de gonflement.

Mais dans les cours d'eau naturels, l'on peut exprimer cette équation sous une forme beaucoup plus simple, attendu que l'on peut y supposer généralement $\frac{L}{L+H} = 1$. Dès lors, en introduisant cette hypothèse dans la relation (3) et en négligeant le terme $\frac{U^2}{gH}$, l'on obtient :

$$ids = \frac{h^3}{h^3 - H^3}dh = \frac{(H+y)^3}{(H+y)^3 - H^3}dy \ldots\ldots\ldots (5)$$

Si l'on remplace $\frac{(H+y)^5}{(H+y)^5 - H^5}$ par la série de termes qui forment le quotient de la division de $(H+y)^5$, ou z^5, par $(H+y)^5 - H^5$, ou $z^5 - 1$, l'on obtient par l'intégration :

$$\frac{is}{H} + C = \left(\frac{H+y}{H}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{H^2}{(H+y)^2} - \frac{1}{5}\,\frac{H^5}{(H+y)^5} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

dans laquelle C est encore déterminé par la condition $s = 0$ et $y = Y$. Le deuxième membre présente, comme tantôt, une série convergente; elle offre, en outre, ainsi que sa dérivée, une propriété très-remarquable, c'est que :

$$\frac{is}{H} = f\left(\frac{y}{H}\right)$$

Il en résulte que, si l'on construit la courbe que cette équation représente, dans l'hypothèse de $H = 1$, c'est-à-dire en posant :

$$is = f(y)$$

ses abscisses s et ses ordonnées y seront dans un rapport constant avec celles du remous sur un cours d'eau quelconque; il suffirait donc de connaître les premières pour en déduire les autres par une simple proportion. M. Dupuit a utilisé cette propriété dans la construction d'une *table de remous* destinée à éviter l'emploi de l'équation (6) pour la solution des divers problèmes. Cette table ne fait que reproduire les valeurs de la série du deuxième membre, dans l'hypothèse d'une hauteur de 1^m pour le régime uniforme. Ainsi, quel que soit le problème à résoudre, qu'il s'agisse de trouver s en fonction de y ou y en fonction de s, dans un cours d'eau de hauteur H′ différente de 1^m, il suffit de chercher la solution dans la table et de multiplier le résultat par H′. L'une des colonnes contient une série de valeurs de y, depuis $0^m,01$ jusqu'à $3^m,00$; l'autre colonne présente en regard les valeurs correspondantes de is. L'auteur a construit une table analogue pour les remous d'abaissement.

Lorsque la hauteur y du remous est très-petite par rapport à celle du régime uniforme, l'équation de la courbe peut se mettre, d'après Dupuit, sous la forme suivante d'une extrême simplicité :

$$is = \frac{P}{3} \log. \left(\frac{Y}{y}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

relation dans laquelle Y et y représentent deux ordonnées, y étant toujours la plus petite, et les distances étant comptées à partir de cette dernière ; l'un des deux remous Y ou y est censé connu dans tous les problèmes. L'exemple suivant fera mieux saisir l'application de cette formule.

L'on suppose qu'un remous de $0^m,50$ se soit produit en un point d'un cours d'eau naturel très-large et *très-profond ;* chercher à quelle distance de ce point le remous sera réduit à $0^m,25$.

La formule donnera, dans ce cas :

$$s = \frac{P}{3i} \log. 2 = 0,231 \frac{P}{i}$$

La question sera donc résolue lorsqu'on donnera la pente i, ainsi que la profondeur $P = H + Y + y$, ou approximativement la profondeur du cours d'eau dans l'étendue du remous.

CHAPITRE CINQUIÈME.

PRESSION RÉCIPROQUE EXERCÉE PAR LES SOLIDES ET LES FLUIDES DANS LEUR MOUVEMENT RELATIF.

A. NOTIONS GÉNÉRALES.

Lorsqu'un corps solide en mouvement est plongé dans un fluide indéfini quelconque, liquide ou gazeux, et relativement en repos, il éprouve une série de pressions dont la résultante est généralement opposée à son mouvement *relatif* par rapport à ce fluide. Cette action contraire constitue donc une véritable résistance; par suite les auteurs lui ont donné le nom de *résistance des fluides*, ou *résistance des milieux*. L'on est convenu aussi de dire qu'un fluide est indéfini, dans les phénomènes que nous considérons, lorsque les dimensions du canal ou du réservoir qui le contient sont très-considérables par rapport au solide en mouvement, c'est-à-dire lorsque l'espace compris entre les parois du lit et celles du corps est assez grand pour qu'il n'y ait pas lieu de tenir compte de la réaction des premières sur le liquide.

D'un autre côté, si l'on suppose que le corps solide précédent soit fixé d'une façon relative par rapport à la masse fluide et que celle-ci seule ait une certaine vitesse, la résistance que le solide en question va opposer au mouvement de cette masse constitue une action analogue à celle du cas précédent, mais qui, d'après certains auteurs, lui serait supérieure pour de mêmes éléments et une même vitesse relative.

Enfin, il ne faut confondre aucune des deux pressions considérées avec l'effort produit par le *choc continu* d'une veine fluide *finie* contre un corps solide d'une certaine surface. Dans ce dernier cas seulement

l'on est parvenu à exprimer analytiquement l'intensité de la résistance en fonction des quantités qui la déterminent.

Plusieurs causes ont empêché jusqu'à présent d'arriver à une solution satisfaisante des deux premiers problèmes. L'une d'elles consiste dans l'influence de la viscosité ; ainsi que nous l'avons vu, il est difficile en général d'en tenir compte exactement, et cette difficulté devient souvent ici insurmontable. D'un autre côté, le mouvement des filets liquides étant dérangé par la présence d'un obstacle solide, il serait nécessaire, pour connaître la résultante des pressions, de chercher en quoi consiste ce dérangement ; c'est ce que l'on n'a pu établir par l'analyse. Aussi n'a-t-on que des connaissances très-imparfaites sur la pression réciproque des fluides et des solides pendant leurs mouvements relatifs ; et les résultats d'expérience, dus en grande partie à *Dubuat*, sont trop incertains pour qu'on puisse les appliquer en toute sécurité.

Il nous suffira donc de faire connaître quelques remarques générales et d'examiner succinctement les indications de l'expérience sur les pressions réciproques d'un solide et d'un fluide indéfini dans le mouvement *rectiligne uniforme*.

B. RÉSISTANCE D'UN PRISME FIXE AU MOUVEMENT RECTILIGNE ET UNIFORME D'UN FLUIDE INDÉFINI QUI LE RENCONTRE NORMALEMENT.

Supposons, avec Dubuat, qu'un prisme droit soit plongé dans un fluide indéfini de façon que son axe se trouve dans la direction du mouvement, et par suite sensiblement horizontal. Si le fluide était en repos, chacun des points de la surface du solide éprouverait une pression hydrostatique représentée par l'abaissement de ce point en dessous du niveau de la masse choquante ; les bases d'amont et d'aval étant égales et également abaissées, les pressions qu'elles recevraient seraient égales et contraires, par suite il n'y aurait aucune tendance au mouvement dans le sens de l'axe. Cela posé, admettons qu'il y ait courant, et qu'il soit composé de filets primitivement parallèles et à peu près rectilignes : il se présente alors des phénomènes tout différents. Du côté de l'amont les filets fluides sont déviés et forment des

courbes qui présentent leur convexité à la base antérieure du prisme ; longeant alors les faces de celui-ci avec un certain accroissement accéléré de vitesse, ils tendent à reprendre vers la base d'aval leur direction primitive ; les courbes décrites tournent ici leur concavité vers cette base, et les filets vont se réunir derrière elle tout en conservant une partie de l'excès de vitesse acquise, partie qui sera d'autant plus grande que leur trajet le long du prisme aura été plus court.

D'après Dubuat, l'augmentation de vitesse des filets fluides le long des faces du prisme proviendrait de ce qu'ils seraient alors resserrés dans un espace moindre, attendu, dit-il, que la masse fluide entre le prisme et les berges du lit fait, jusqu'à un certain point, l'office d'un corps résistant.

Continuant ensuite son analyse, l'auteur explique comment il se fait que les divers mouvements des filets tendent à augmenter la pression sur la base antérieure du prisme et à la rendre supérieure à la pression hydrostatique ; tandis qu'à la base postérieure ou d'aval il se produit une diminution par suite de l'accélération de vitesse produite par l'obstacle, et par conséquent la pression hydrostatique y est plus forte que la pression réelle.

Il n'y a pas lieu de tenir compte de l'action des composantes sur les faces latérales, car étant toujours égales et opposées elles s'entre-détruisent et ne produisent aucun mouvement.

Ces considérations admises, déterminons l'intensité totale de la pression sur le prisme plongé. Désignons par :

R' la résultante des actions positives, dues à l'obstacle, qui se produisent sur la base d'amont ;

R'' la résultante des actions négatives qui se présentent à l'aval ;

R la résultante des forces R' et R''.

Les forces R' et R'' sont nommées respectivement par Dubuat *pression vive* et *non-pression*. Dans les cas ordinaires, ces résultantes, ainsi que les actions hydrostatiques correspondantes sur les deux bases, ont une direction commune, parallèle au courant ; il en résulte que leur résultante totale R est égale à leur somme arithmétique $R' + R''$.

Supposons encore approximativement que la vitesse soit constante et égale à $\sqrt{2gh}$ pour tous les filets, et que la figure de ceux-ci ne

change pas pour un même corps plongé dans des courants d'inégale rapidité.

Soit H la pression hydrostatique moyenne, ou l'abaissement de l'axe du prisme en dessous de la surface du liquide ; M′ et M″ deux constantes, à déterminer par expérience, qui dépendent de la forme du corps, de sa position dans le courant, ainsi que de la section S de la base d'amont ou, plus généralement, de la surface de la section du solide perpendiculaire à la résultante totale. Le liquide employé par Dubuat, dans ses expériences, étant de l'eau, nous admettrons avec lui que le poids Δ du mètre cube est sensiblement égal à l'unité.

Les pressions hydrauliques étant proportionnelles à la hauteur h, nous pouvons représenter la pression vive, sur l'unité de surface, par $M'h$, et la non-pression par $M''h$. La pression totale sur la base d'amont sera donc $H + M'h$; elle sera $H - M''h$ sur la base d'aval. Ces deux forces étant supposées parallèles au courant, elles agissent en sens contraire, et leur résultante ou la force qui pousse le prisme est égale à leur différence arithmétique. L'expression de cette résultante, ou plutôt la hauteur de la colonne qui la mesure, sera donc, par unité de surface :

$$H + M'h - (H - M''h) = (M' + M'')h = R$$

La pression totale serait représentée par RS. L'expérience montre en effet que lorsque deux corps solides semblables sont semblablement placés dans un courant indéfini, les filets liquides déviés ont des figures semblables ; l'on en conclut qu'aux points homologues des deux corps la pression reste la même par unité de surface. Par suite, les pressions R′ et R″ sont, pour ces solides, proportionnelles au carré des côtés homologues, c'est-à-dire aux aires S′ et S″ d'une section occupant dans les deux corps une position semblable.

Il résulte de ce qui précède que les forces R′ et R″ sont proportionnelles :

1° Au carré de la vitesse U du courant, puisque $h = \frac{U^2}{2g}$;

2° Au poids Δ du mètre cube du liquide ;

3° A l'aire S de la section perpendiculaire.

Quelques expériences cependant semblent prouver que le troisième principe n'est pas exact quand il s'agit, au lieu de solides prisma-

tiques, de plaques ou palettes très-minces. Ainsi *Mariotte* ayant exposé à l'action d'un courant de la Seine une plaque carrée, plus petite dans le rapport de 25 à 100 que celle qu'avait employée Dubuat, a trouvé que la pression totale R croît dans un rapport plus grand que celui des surfaces choquées, sans toutefois pouvoirs déterminer la loi de l'accroissement.

Voici l'une des expériences faites par Dubuat pour déterminer les valeurs des constances M' et M''.

Les solides plongés consistaient en trois parallélipipèdes rectangles dont la base était un carré de 0^m325 de côté; l'un d'eux consistait en une simple plaque, sa hauteur n'étant que de 0^m009; le deuxième formait cube, et le troisième avait 0^m975 de hauteur, c'est-à-dire le triple du côté de la base. La vitesse U du courant était de 0^m975 par seconde.

L'appareil employé par Dubuat était muni d'un piézomètre qui lui permettait d'observer, sur les différents points des bases carrées, les pressions hydrauliques, c'est-à-dire les hauteurs des colonnes piézométriques au-dessus ou en dessous de la surface du courant, suivant qu'il mesurait la pression vive ou la non-pression. Ayant mesuré cette pression hydraulique sur 625 points de la base d'amont de chacun des trois prismes, il l'a trouvée constante, quelle que fût la longueur de ces derniers, et égale à $1,19h$. Ainsi le coefficient M' de la pression vive a pour valeur constante :

$$M' = 1,19$$

Mais il n'en a pas été ainsi de la non-pression mesurée par l'abaissement de la colonne piézométrique en dessous du niveau du courant : le coefficient M'' a varié, et sa valeur a été :

Pour la plaque.	0,67
Pour le cube.	0,27
Pour le prisme long.	0,15

Les non-pressions ont diminué avec la cause qui les produisait, la vitesse des filets liquides à l'aval, vitesse qui diminue à mesure que la longueur des obstacles augmente. Le coefficient $M = M' + M''$, entrant dans l'action totale du courant, aurait donc les valeurs respectives 1,86, 1,46 et 1,34; et la pression totale, ou l'effort de ce courant sur les trois prismes, serait représentée par $1,86\,h$, $1,46\,h$ et $1,34\,h$.

D'après d'autres expériences de Dubuat, le coefficient M de la non-pression ne diminuerait pas d'une manière indéfinie à mesure que la longueur du corps augmente, mais jusqu'à une certaine limite seulement au delà de laquelle il se produirait des accroissements.

C. RÉSISTANCE ÉPROUVÉE PAR UN SOLIDE QUI SE MEUT D'UN MOUVEMENT UNIFORME ET RECTILIGNE DANS UN LIQUIDE INDÉFINI RELATIVEMENT EN REPOS.

1° *Solides entièrement plongés.*

Depuis Newton jusqu'à Dubuat, tous les hydrauliciens avaient admis que la pression résultante exercée sur un solide fixe par un liquide animé d'une vitesse U était égale à celle que supporterait ce solide doué de la même vitesse U, et semblablement placé dans le fluide en repos. Mais il semblerait résulter d'expériences faites par ce dernier observateur que, à égalité de vitesse relative et avec un même solide, la pression totale est plus forte dans le premier cas que dans le second.

Ayant repris la plaque carrée de $0^m,325$ de côté et $0^m,009$ d'épaisseur qui avait donné les valeurs $M' = 1,19$ et $M'' = 0,67$, il la fit mouvoir, avec la même vitesse de $0^m,975$, dans une eau immobile, et il obtint pour résultat :

$$M' = 1 \quad \text{et} \quad M'' = 0,43$$

Admettant ensuite que cette valeur M'' doit varier pour le cube et le prisme allongé d'une façon analogue à celle du cas précédent, il a adopté :

Pour le cube . . . . . $M'' = 0,43 . \frac{0,27}{0,67} = 0,17.$

Pour le prisme long. . . . . $M'' = 0,43 . \frac{0,15}{0,67} = 0,10.$

Il en résulte pour M ou $M' + M''$ les valeurs 1,43, 1,17 et 1,10, au lieu des quantités 1,86, 1,46 et 1,34 qui se rapportent aux mêmes solides immobiles dans un courant.

Dubuat a expliqué le résultat précédent en supposant que, dans

l'état de repos, l'eau se laisse plus facilement diviser que lorsqu'elle est en mouvement. Cette explication n'est guère admissible; elle est même opposée aux principes ordinaires de la mécanique. En effet, il est généralement admis que l'action mutuelle de deux molécules dépend uniquement de leurs masses et de leur distance, lorsque la température et l'état électrique sont censés constants; or, dans des mouvements relatifs identiques, les masses et les distances restent les mêmes; et, comme l'on ne peut guère supposer qu'il se produise dans le deuxième cas un changement de chaleur ou d'électricité, il est difficile d'y admettre une action mutuelle différente. Il nous paraît plus logique de supposer que, dans les diverses expériences de Dubuat, les mouvements relatifs n'étaient pas identiques; que, par suite, le solide produisant un plus grand trouble dans un courant que dans un liquide immobile, il doit exercer dans le premier cas une réaction plus grande, et par conséquent éprouver plus de résistance. Du reste, plusieurs expériences d'autres hydrauliciens n'ont pas abouti aux conclusions de Dubuat; les différences trouvées par ces auteurs ont été généralement moindres que les précédentes.

Quant aux lois que suit la résistance dans le deuxième cas, elles paraissent être les mêmes que dans le premier. Ainsi, les observations de Borda, Bossut, Dubuat, Vince, Smeaton, etc., constatent que, pour les vitesses ordinaires de $0^m,60$ à $4^m,00$, la résistance est encore sensiblement proportionnelle au carré U^2 de la vitesse du solide. En dessous de $0^m,60$ elle diminue dans un rapport inférieur à celui du carré. Comme précédemment aussi, elle est proportionnelle à la surface S de la base ou de la section qui pousse le fluide, sauf pour les plaques minces, où elle croît dans un rapport plus considérable. L'expression générale de la résistance R est donc encore :

$$R = M\Delta Sh \quad \text{ou bien :} \quad R = M\Delta S\frac{U^2}{2g}$$

Si le liquide employé est l'eau :

$$R = MSh \quad \text{ou bien :} \quad R = MS\frac{U^2}{2g}$$

expression dans laquelle M désigne un coefficient numérique variable avec la forme et les dimensions du corps en mouvement.

2° *Solides prismatiques flottants.*

Les considérations et les résultats relatifs aux solides entièrement plongés s'appliquent aux corps flottants, si l'on a soin de donner pour valeur à S, dans la formule générale, l'aire de la partie plongée de la section perpendiculaire à la résultante.

En résumé, dans les solides prismatiques, dont la longueur excède $\sqrt{S}$, le coefficient M varie de 1,2 à 1, et ne descend pas en dessous de cette dernière limite.

Si la longueur du prisme est le triple du côté de la base, ou plutôt de $\sqrt{S}$, l'on peut prendre, d'après Dubuat, ainsi que nous l'avons vu :

$$M = 1,10$$

et, pour une longueur égale à 6 fois $\sqrt{S}$, ce coefficient se rapproche de l'unité Mais, si la longueur augmente encore, M croît de nouveau; l'on conçoit en effet que dès lors les résistances dues à la viscosité engendrent des frottements qui font plus que compenser l'effet favorable de la diminution dans la non-pression.

L'emploi de poupes et de proues diminue très-notablement la résistance, en agissant respectivement sur la non-pression et sur la pression vive.

En ajoutant à un corps prismatique, dont la longueur serait d'environ 5 à 6 fois la largeur, une poupe suffisamment aiguë, l'on diminue beaucoup la non-pression; l'action totale tend d'autant plus à se réduire à la pression vive que la poupe est plus aiguë et plus longue, et l'on obtient approximativement dans ce cas :

$$M = M' = 1,00$$

Si le prisme est garni, comme dans les bateaux et certaines piles de ponts, d'une proue destinée à fendre le liquide en amont, la résistance diminue selon la forme et la saillie de cette partie extrême. Ainsi, quand la proue est formée de deux plans verticaux se coupant sous un angle voisin de 60°, la pression vive est réduite de moitié; et, si le prisme possède en outre une proue aiguë telle que $M'' = 0$, il en résulte :

$$M = \frac{M'}{2} = 0,50$$

L'on arrive au même résultat avec une poupe allongée et une proue composée d'un demi-cylindre vertical de même largeur que le prisme.

Quand la base de la proue est un triangle d'une saillie égale au double de la largeur du prisme, la pression vive se réduit aux 2/5 de ce qu'elle serait sans proue.

Si les deux côtés se composent d'arcs de cercle au lieu de lignes droites, la résistance devient moindre, à saillie égale, que dans les autres cas.

Lorsqu'une proue est formée par le prolongement des faces latérales du prisme coupées en dessous par un plan incliné de 30° environ sous l'horizon, la pression vive n'est plus que le tiers de ce qu'elle serait si le solide se terminait carrément.

Les vaisseaux sont généralement construits de façon que leur forme se rapproche de celle qui présente la moindre résistance à l'action de l'eau. Si l'on suppose une coupe horizontale moyenne correspondant au milieu de la partie de la carène qui est plongée, la longueur de la proue mesurée sur cette coupe doit être égale à 5 ou 6 fois sa largeur maxima; et cette dernière doit se trouver un peu en deçà du milieu de la longueur, à compter du saillant. D'après des expériences de Bossut, un prisme droit terminé carrément, dont la section avait la forme du maître-couple ou section maxima d'un vaisseau et dont la longueur était de 5 à 6 fois la largeur, a donné M, ou $M' + M''$, un peu supérieur à l'unité; tandis que le même prisme terminé par une proue et une poupe, comme un vaisseau, et également plongé, a présenté pour M environ $\frac{1}{6}$ de la valeur précédente, ou bien :

$$M = 0,17$$

Il n'y a évidemment rien d'absolu dans les différentes valeurs du coefficient de la résistance ; elles peuvent même varier quelquefois par suite de circonstances secondaires dont il serait difficile de tenir compte. En général, quand il s'agit de calculer la résistance qu'éprouve un corps flottant, il faut prendre pour S la surface de la plus grande section transversale de la partie plongée, puis donner au coefficient M ou $M' + M''$ la valeur qui soit le plus en rapport avec la forme des extré-

mités d'amont et d'aval en se guidant sur les différents cas que nous venons d'examiner.

Il faut remarquer que les résultats précédents ne peuvent être appliqués lorsque la largeur du canal ou du cours d'eau n'excède pas 5 à 6 fois celle du corps flottant ou plongé en mouvement.

D. PRESSION EXERCÉE PAR LE CHOC CONTINU D'UNE VEINE FLUIDE CONTRE UN PLAN FIXE OU MOBILE.

Supposons d'abord que le plan *mn* soit fixe et que la veine fluide vienne le frapper suivant une direction normale AC (fig. 61). Désignons par :

R la réaction totale exercée normalement par le plan ;

U la vitesse du fluide ;

Δ son poids spécifique, et $\frac{\Delta}{g}$ sa densité ;

Ω l'aire de la section transversale de la veine ;

dM la quantité constante de fluide qui afflue pendant chaque instant dt.

Comme la quantité de mouvement de l'action, en l'unité de temps, est $\frac{dM}{dt}$ U, nous aurons :

$$R = \frac{dM}{dt} U$$

ou bien, en remplaçant dM par sa valeur $\frac{\Delta}{g} \Omega U dt$:

$$R = \frac{\Delta}{g} . \Omega . U^2$$

Nous avons supposé ici que la masse fluide dM perdait instantanément toute sa vitesse normale ; mais cette hypothèse n'est pas confirmée par l'expérience. Comme la vitesse perdue U′ ne saurait être cependant que proportionnelle à celle d'arrivée U, nous poserons :

$$R = N . \frac{\Delta}{g} . \Omega . U^2$$

N désignant un coefficient qui est toujours inférieur à l'unité, mais dont la valeur en est d'autant plus rapprochée que la planchette a des

dimensions plus considérables par rapport à Ω. Ainsi, ce coefficient devant dépendre du rapport de l'aire de la planchette à celle de la section de la veine, il ne saurait y avoir d'assimilation entre N et le coefficient M de la résistance des fluides.

Si la veine vient choquer le plan suivant une direction oblique BA qui forme un angle α avec la normale AC, la composante normale de la vitesse, ou U sin. α est seule détruite d'une manière continue par la réaction de la planchette, et la formule devient :

$$R = N. \frac{\Delta}{g} . \Omega. U^2 \cos. \alpha$$

ou bien, lorsque le fluide est de l'eau :

$$R = N.\Omega. U^2 \cos. \alpha$$

Supposons maintenant que la planchette soit douée aussi d'un mouvement de translation dans l'un ou l'autre sens ; admettons, par exemple, qu'elle se déplace, avec une vitesse u dont la direction DA fasse un angle β avec la normale. La vitesse détruite normalement sera U cos. α — u cos. β, et l'effort exercé sera exprimé par :

$$R = dM. \frac{U \cos. \alpha - u \cos. \beta}{dt}$$

$$R = \frac{\Delta}{g} . \Omega. U (U \cos. \alpha - u \cos. \beta)$$

ou, plus généralement, si les dimensions de la planchette ne sont pas grandes :

$$R = N. \frac{\Delta}{g} . \Omega. U (U \cos. \alpha - u \cos. \beta)$$

Dans les calculs qui précèdent nous n'avons pas eu égard à la présence d'une force qui contribue à augmenter la pression sur la planchette, et dont l'action varie avec l'angle d'incidence et la section de la veine : nous voulons parler du poids du liquide.

Supposons qu'une veine d'un liquide quelconque, tombant dans l'air, vienne heurter d'une manière continue un plan fixe, *mn*, fig. 62. L'expérience prouve que, dans ces circonstances, la veine se gonfle depuis sa rencontre avec le plan jusqu'à une certaine section, AB par exemple, où l'action de l'obstacle cesse de se faire sentir ; en dessous de AB les filets s'infléchissent et les molécules liquides tendent à se mouvoir suivant des parallèles à *mn*.

Désignant par P le poids de la partie ABEFDC du liquide qui réagit sur le plan, par γ l'angle de ce dernier avec l'horizon, et appliquant entre AB et le cylindre liquide CDFE le théorème général des quantités de mouvement projetées, nous obtiendrons :

$$R = P \cos. \gamma + N. \frac{\Delta}{g}. \Omega. U^2 \cos. \alpha$$

Quant à la pression atmosphérique, comme elle s'exerce sur tout le contour du système liquide qui agit contre le plan, sa résultante et son impulsion sont nulles.

Pour le cas d'un plan vertical choqué horizontalement, l'on obtient $\gamma = 90°$ et $\alpha = 0$; par suite, la résistance R devient égale à la seule pression vive :

$$R = N. \frac{\Delta}{g}. \Omega. U^2$$

expression dans laquelle $\frac{\Delta}{g}. \Omega. U^2$ représente le poids d'un cylindre d'eau ayant pour base la section verticale Ω de la veine et pour longueur le double de la hauteur due à la vitesse U ; l'on peut poser en effet :

$$\frac{\Delta}{g}. \Omega. U^2 = \frac{\Delta}{g}. \Omega. 2gh = 2\Delta. \Omega. h$$

Lorsque la veine fluide rencontre une surface concave, ou un plan muni de rebords suffisamment rapprochés pour rencontrer et relever les filets de façon à les empêcher de devenir parallèles à ce plan, la résistance due à la pression vive et au poids P se trouve augmentée, d'après des expériences de M. Christian, de 1/6 à 1/5 de ce qu'elle aurait pour une surface plane.

Un résultat contraire se produirait si le liquide rencontrait une surface convexe ou un plan trop peu étendu pour le dévier entièrement.

E. CALCUL THÉORIQUE DE LA RÉSISTANCE D'UN OBSTACLE FIXE AU MOUVEMENT RECTILIGNE ET UNIFORME D'UN FLUIDE INDÉFINI QUI LE RENCONTRE D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE.

Nous avons établi au § B les formules empyriques trouvées par Dubuat pour ce qui concerne les prismes et les pressions normales. Il s'agit maintenant de rechercher par l'analyse la résultante des pres-

sions lorsque l'obstacle est quelconque, et, que le courant liquide ou gazeux dans lequel il est plongé le frappe obliquement.

La pression supportée par l'un des éléments du solide fixe peut toujours être considérée comme composée de la pression hydrostatique et de celle qui est due à la vitesse relative du fluide. Comme la résultante des pressions hydrostatiques élémentaires est connue d'avance, et qu'il est par suite facile d'en tenir compte, il reste seulement à calculer ici la résultante des pressions produites par la vitesse. Dans ce but, nous ferons usage d'une hypothèse généralement admise par laquelle chaque filet fluide est censé aller isolément rencontrer un élément correspondant de la surface du solide, en y exerçant une pression analogue à celle du § D. Dès lors la partie de cette pression due spécialement à la vitesse sera proportionnelle : 1° à la section transversale du filet; 2° au carré de sa vitesse relative; 3° au cosinus de l'angle α que cette vitesse fait avec la normale à l'élément de surface.

Pour le cas général où le corps a une forme quelconque, l'angle α varie naturellement d'un élément à un autre; la question ne saurait donc être résolue que d'une manière approximative, en rapportant le mieux possible le corps en question à un solide géométrique; les calculs deviennent alors assez simples : supposons, par exemple, les trois cas suivants.

1° *Surface plane.* (Fig. 63.)

Soit S l'aire de cette surface mn; U la vitesse du courant dans lequel elle est plongée et α l'angle de cette vitesse avec la normale. Un filet de section ω produira une pression $n\omega\, U^2 \cos.\alpha$, expression dans laquelle n est une constante; la résultante sera la somme de quantités analogues pour tous les filets qui rencontrent l'aire mn, et comme n, U et α ne varient pas de l'un à l'autre, cette somme sera le produit de $n\, U^2 \cos.\alpha$ par l'aire de la section droite An; de là :

$$R = nU^2 \cos.\alpha \times S \cos.\alpha$$

$$R = nU^2 S \cos.^2\alpha$$

ou bien :

$$R = nU^2 S \sin.^2 i$$

La pression totale due à la vitesse varierait donc comme le carré du sinus de l'angle formé par le plan et la direction du courant.

2° *Cylindre à section circulaire.*

Soit : R le rayon et L la longueur du cylindre. Si l'on désigne par γ l'angle que fait un plan diamétral quelconque avec le plan diamétral perpendiculaire au courant, la pression exercée sur une bande élémentaire de surface $Rd\gamma$ et de longueur L aura pour valeur $nLRd\gamma . U^2 \sin.^2\gamma$, et pourra se décomposer en deux autres forces :

$$nLRU^2 \sin.^2\gamma\, d\gamma \quad \text{et} \quad nLRU^2 \sin.^2\gamma \cos.\gamma d\gamma$$

La somme de ces dernières composantes s'exprimera par :

$$nLRU^2 \int_0^\pi \sin.^2\gamma \cos.\gamma d\gamma$$

quantité identiquement nulle, les composantes élémentaires se détruisant deux à deux. La somme des premières, sur le pourtour du demi-cylindre, ou 180°, rencontré par le courant, aura pour valeur :

$$nLRU^2 \int_0^\pi \sin.^2\gamma d\gamma = nLRU^2 \left(\int_0^\pi \sin.\gamma d\gamma - \int_0^\pi \sin.\gamma \cos.^2\gamma d\gamma \right)$$

ou bien :

$$nLRU^2 \left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} nLRU^2$$

Ainsi la pression totale exercée par le courant se réduit à une force $\frac{4}{3} nLRU^2$ dirigée dans le sens de la vitesse U.

Si, au lieu de la surface cylindrique, l'on opposait au choc du fluide le plan diamétral, de surface RL, perpendiculaire à la vitesse, la pression serait plus forte de moitié, c'est-à-dire égale à :

$$\frac{4}{3} nLRU^2 + \frac{2}{3} nLRU^2 = n.\ 2\ LR.\ U^2$$

3° *Solide sphérique.*

En agissant comme dans le cas précédent, l'on trouve pour valeur de la pression totale :

$$\frac{1}{2} n.\ \pi R^2.\ U^2$$

Si l'on exposait à l'action du fluide le plan diamétral, de surface πR^2, perpendiculaire à la vitesse U, l'on obtiendrait :

$$n.\ \pi R^2.\ U^2$$

c'est-à-dire une pression totale double de la précédente.

Conclusions.

Pour effectuer les calculs qui précèdent nous avons été forcés d'admettre, avec la généralité des auteurs, une hypothèse qui est loin d'être conforme à la réalité; les divers filets n'agissent nullement comme s'ils étaient isolés, et la moindre déviation de l'un d'eux se fait sentir sur le filet voisin en le forçant également à se détourner et à presser obliquement l'élément de la surface solide. Il faut remarquer en outre que nous n'avons pas tenu compte de la non-pression; celle-ci a cependant une certaine influence, spécialement pour le cylindre et la sphère. Aussi les faits ne sont guère d'accord avec les résultats de la théorie. Nous avons trouvé que la pression exercée sur un cylindre n'est que les $\frac{2}{3}$ de celle qui serait supportée par son plan diamétral perpendiculaire à U, et que, pour la sphère, ce rapport est de $\frac{1}{2}$. Dans plusieurs expériences faites par *Borda* sur l'action des courants d'air, ces rapports ont été trouvés égaux respectivement à 0,57 et 0,41 au lieu de 0,66 et 0,50, comme l'indiquent nos calculs. Pour d'autres surfaces, le rapport expérimental a été quelquefois plus grand que le rapport calculé théoriquement; du reste, l'écart dans l'un ou l'autre sens peut atteindre des valeurs assez notables.

Il est encore une loi qui n'est pas d'accord avec la réalité, et que nous avons admise pour les surfaces planes exposées à l'action d'un courant sous diverses inclinaisons, et qui est exprimée par la formule:

$$R = nU^2S \sin.^2 i$$

D'après *Hutton*, l'exposant du sinus ne serait pas constant et égal à 2, mais variable avec l'inclinaison i. Suivant cet auteur, la formule empyrique deviendrait, lorsqu'il s'agit de courants d'air :

$$R = nU^2S \sin.\ i^{1,86 \cos.\ i}$$

Cette fonction sin. $i^{1,84 \cos. i}$ peut être remplacée avantageusement, pour la facilité des calculs, par l'une des expressions plus simples :

$$\sin.^2 i + 0,20 \frac{\sin.^2 2\, i}{1 + \cos.^2 i} \quad \text{ou bien :} \quad \sin.^2 i \, \frac{2,80 - 1,80 \sin.^2 i}{2 - \sin.^2 i}$$

Les valeurs données par ces trois fonctions sont presque identiques entre les limites $i = 0$ et $i = \frac{\pi}{2}$.

CHAPITRE SIXIÈME.

JAUGEAGE DES COURS D'EAU.

A. NOTIONS GÉNÉRALES.

Ainsi que nous l'avons vu au chapitre IV, la détermination de la vitesse en un point quelconque d'un courant est une opération indispensable pour résoudre la plupart des problèmes d'hydrodynamique relatifs aux cours d'eau naturels.

Cette recherche a généralement pour but la connaissance de la vitesse moyenne U, en fonction des vitesses en d'autres points d'une même section transversale, telles que celles à la surface, au fond et près des rives. Elle peut aussi être parfois nécessaire pour permettre d'apprécier l'action d'un courant sur son lit.

La vitesse moyenne U peut s'obtenir de plusieurs manières, ainsi que nous le verrons plus loin. La recherche de la vitesse en un point quelconque exige l'emploi de mesures directes que l'on effectue au moyen d'instruments plus ou moins précis appelés *hydromètres*.

B. MESURE DES VITESSES.

I. *Vitesse à la surface d'un courant.*

a. Flotteurs.

Le moyen le plus simple et le plus en usage pour mesurer directement la vitesse V maxima à la surface d'un cours d'eau consiste dans l'emploi de flotteurs. Ce sont des corps légers, d'une densité un peu inférieure à celle de l'eau, tels que le liége ou le bois, et convenable-

ment lestés pour ne pas s'élever sensiblement au-dessus de la surface liquide. L'on emploie aussi à cet usage des sphères métalliques creuses, qu'on leste avec de la grenaille de plomb jusqu'à ce qu'elles soient plongées presque complétement. Les flotteurs ne peuvent servir à mesurer une vitesse autre que V, c'est-à-dire celle du filet le plus rapide, car ils ne sauraient se maintenir dans la direction nécessaire si on les plaçait entre ce filet et la rive. Voici comment on peut opérer avec ce genre d'hydromètres.

Après avoir choisi une portion du cours d'eau assez régulière pour présenter un mouvement uniforme et, de préférence, le plus droite possible, on détermine sur une rive deux points A et B distants entre eux de N mètres, parallèlement à la ligne de plus grande vitesse de la surface du courant. Un premier observateur, muni de n flotteurs, se tient à la hauteur du point A situé en amont; un second, placé en B, est chargé d'observer la mesure du temps T, depuis le moment où le premier flotteur quitte le point A jusqu'à ce que le n^{me} passe devant le point B. Notons que l'observateur d'amont ne lâche le second flotteur qu'au moment où celui d'aval lui indique par un signe que le premier flotteur est arrivé à sa hauteur, en B; ainsi de suite pour les suivants jusqu'au n^{me}. De cette opération l'on conclut :

$$V = \frac{nL}{T}$$

Comme il se pourrait qu'il n'y eût pas toujours coïncidence complète entre l'instant où un flotteur achève sa course et celui où le suivant la commence, il faut donner à AB une longueur suffisamment grande pour que cette circonstance ne produise qu'une erreur en temps de peu d'importance par rapport à $\frac{T}{n}$. D'un autre côté, il faut limiter convenablement la distance, sinon la vitesse pourrait varier d'autant plus sur ce parcours que la régularité du lit serait moins constante.

b. **Volant à aubes.**

Dubuat a employé avec succès, pour la mesure de V, une roue en sapin, de $0^m,73$ de diamètre, et garnie de 8 aubes ou palettes carrées de $0^m,08$ de côté. Elle était montée sur un arbre de même bois, tour-

nant au moyen de petits tourillons en fer dans des crapaudines en cuivre. Le poids de tout l'instrument n'atteignait guère $0^k,70$.

Si l'on établit une roue analogue sur un courant de façon qu'une palette plonge dans le liquide, en admettant que la résistance à la rotation de la roue soit sensiblement nulle, la vitesse de l'eau sera égale à celle du centre de percussion de la palette, vitesse que l'on déduit aisément du nombre de tours, en ayant soin de mesurer les longueurs parcourues sur la circonférence décrite par les centres de percussion. L'on pourrait, pour plus d'exactitude, équilibrer d'avance les frottements au moyen d'un poids suspendu à l'arbre par une corde qui se déroulerait pendant la rotation.

c. Pendule hydrométrique.

Le pendule hydrométrique se compose d'une boule d'ivoire ou de métal creux, suspendue par un fil dont l'extrémité est fixée au centre d'un quart de cercle gradué. Le poids P de la sphère doit être supérieur à celui d'un égal volume d'eau, et elle doit rester complétement immergée pendant toute la durée de l'opération.

L'instrument étant établi au-dessus du point dont on veut mesurer la vitesse, la pression Q du courant contre la sphère fera prendre au fil de suspension une certaine inclinaison α sur la verticale; il y aura dès lors équilibre entre cette pression et la composante horizontale CD (fig. 64) ou P tang. α; d'où :

$$Q = P \text{ tang. } \alpha$$

Or, nous avons vu au chapitre V que la pression Q exercée par un liquide contre un obstacle fixe est égale au produit du carré de la vitesse relative V de ce liquide par un coefficient C, constant pour des corps de même forme et de mêmes dimensions; l'on peut donc poser :

$$Q = CV^2$$

et, comme conclusion :

$$V = \sqrt{\frac{P}{C} \text{ tang. } \alpha}$$

Pour tarer un pendule hydrométrique donné c'est-à-dire pour déterminer la valeur de la constante C qui correspond aux dimensions

de sa sphère, il suffira d'opérer sur un courant de vitesse connue V'; l'on aura encore :

$$V' = \sqrt{\frac{P}{C} \text{ tang. } \alpha'}$$

et, de là :

$$C = \frac{P \text{ tang. } \alpha'}{V'^2}$$

$$V = V' \sqrt{\frac{\text{tang. } \alpha}{\text{tang. } \alpha'}}$$

Le quart de cercle gradué donne directement les angles α et α'.

II. *Vitesse en un point quelconque.*

d. Tube de Pitot.

Le tube de Pitot, qui porte le nom de son inventeur, est le plus simple des hydromètres de la seconde catégorie. C'est au moyen de cet instrument que Pitot découvrit le fait de la diminution des vitesses à partir de la surface, et qu'il renversa ainsi la théorie, généralement admise à cette époque, d'après laquelle la vitesse des filets d'une même section dépendrait uniquement de la pression du liquide supérieur, c'est-à-dire qu'elle irait en croissant de la surface au fond.

L'instrument employé par l'inventeur était un simple tube en verre recourbé à l'extrémité inférieure et ouvert aux deux bouts. Pour mesurer la vitesse v d'un filet, ou plutôt d'une veine liquide située à une profondeur H (fig. 65), le tube était plongé dans le courant, le bout recourbé tourné vers l'amont et le centre A de son orifice à hauteur de cette veine. Le liquide entrait alors dans le cylindre creux et s'y élevait d'une certaine quantité h au-dessus du niveau supérieur MN, en vertu de la pression due à sa vitesse v. D'après Pitot cette hauteur h serait celle qui correspondrait à la relation :

$$v = \sqrt{2gh}$$

c'est-à-dire qui serait capable de produire la vitesse v cherchée.

Mais, par suite des expériences citées au chapitre V, Dubuat fit remarquer l'inexactitude de l'hypothèse précédente. La hauteur h mesure bien la pression exercée sur l'orifice inférieur, mais celle-ci n'est pas proportionnelle à la vitesse; nous avons vu que la pression moyenne p

par unité de surface sur cet orifice dépasse la pression hydrostatique d'une quantité proportionnelle au carré de la vitesse v, et à un coefficient C′ variable avec la forme et les dimensions de l'obstacle. Nous poserons donc les deux relations suivantes :

$$p = H + h \quad \text{et} \quad p = H + C' \frac{v^2}{2g}$$

qui donnent par soustraction :

$$h = C' \frac{v^2}{2g}$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{C'}}$$

formule dans laquelle C′ est constant pour un tube de forme et de dimensions déterminées.

Dubuat fit ses premiers essais avec un tube en fer-blanc, de $0^m,04$ de diamètre extérieur, dont la branche inférieure avait environ $0^m,35$ de longueur. Pour tarer cet instrument, c'est-à-dire, pour déterminer la valeur de C′ qui lui est propre, il le fit mouvoir dans une eau tranquille en lui imprimant diverses vitesses uniformes connues; la moyenne des résultats obtenus donna pour C′ la valeur :

$$C' = 1,15$$

Dubuat modifia ensuite l'instrument de façon à le rendre plus sensible en isolant le filet central de la veine liquide; à cet effet il donna à la branche horizontale la forme d'un entonnoir, et en ferma l'orifice par une plaque percée d'un petit trou vers le centre A. Il arriva que cette modification eut pour effet de rendre plus forte la pression qui faisait monter l'eau dans le tube; c'est-à-dire que, à vitesse égale, la hauteur h devint plus grande et plus facile à observer. Par suite aussi la valeur du coefficient C′ fut différente : elle atteignit en moyenne 1,50 ou $\frac{3}{2}$. Ainsi la hauteur due à la vitesse v était représentée par les $\frac{2}{3}$ de l'élévation h du flotteur dans le tube vertical; il en résulte la relation :

$$v^2 = 2g \times \frac{2}{3} h$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} gh} = 3,62 \sqrt{h}$$

Le tube de Pitot fut encore modifié ultérieurement par d'autres hydrauliciens, tels que Michelotti, Mallet, etc. Mais on ne parvint guère à lui donner une exactitude suffisante, surtout pour la mesure des petites vitesses. Le seul perfectionnement réel qui ait été apporté à cet hydromètre est dû à MM. Darcy et Baumgarten.

e. **Tube de Pitot perfectionné par Darcy et Baumgarten** (fig. 66).

L'instrument suivant, conçu par Darcy, a été modifié dans quelques détails par Baumgarten. Il se compose d'un tube en verre, à deux branches AB et CD, fixées sur une plaque graduée, et garnies à leur extrémité de deux tiges creuses en cuivre, B*a* et D*b*, d'un très-petit diamètre.

Pendant l'opération les branches verticales se placent dans un plan parallèle au courant; l'une des deux tiges horizontales est dirigée, comme dans les tubes déjà cités, en sens opposé à la direction du liquide auquel elle présente normalement son orifice; la seconde tige *b*D est ouverte aussi à son extrémité, mais celle-ci est destinée à recevoir un ajutage que l'on oriente dans le courant de façon qu'il se présente une *non-pression* sur son entrée. L'ajutage indiqué à la fig. 66 est celui du modèle que possède l'école des ponts et chaussées; il est disposé horizontalement et son orifice *b'* est placé à la partie inférieure.

Cherchons la formule des vitesses pour cet instrument. Soient :

h la hauteur représentative de la pression en a;

h' la hauteur représentative de la non-pression en b'.

C' et C'' deux coefficients constants pour des appareils de même forme et de mêmes dimensions.

Nous aurons :

$$h = C' \frac{v^2}{2g} \quad \text{et} \quad H = C'' \frac{v^2}{2g}$$

D'où il résulte :

$$h + H = (C' + C'') \frac{v^2}{2g}$$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{h + H}{C' + C''}$$

$$v^2 = 2g \frac{h + H}{C' + C''}$$

Le tarage de l'instrument se fera encore, soit en le plaçant dans un courant de vitesse connue, soit plus généralement en lui imprimant certaines vitesses dans une eau tranquille. Remarquons à ce sujet que, dans toutes les opérations analogues, il est indispensable de déterminer le coefficient constant au moyen d'une série d'observations faites sur des vitesses différentes ; l'on donnera alors pour valeur à ce coefficient la moyenne des résultats trouvés. Il résulte, en effet, des expériences de Dubuat, que les valeurs de C, de C′ et de C″, des formules précédentes ne sont pas constantes d'une manière absolue pour un même instrument, mais qu'elles varient plus ou moins suivant la grandeur de la vitesse que l'on emploie dans le tarage. Il est évident d'autre part que le coefficient de tarage $\frac{1}{C'+C''}$ doit varier suivant l'espèce d'ajutage de la tige inférieure.

f. Balances hydrométriques ; tachomètre de Brünings.

Les balances ou romaines hydrométriques se composent généralement d'une plaque ou planchette exposée au choc normal du liquide, et maintenue dans sa position primitive au moyen d'un contre-poids. Le tachomètre de Brünings appartient à cette catégorie d'hydromètres.

Cet instrument consiste en une plaque A (fig. 67) fixée à l'extrémité d'une tige AB qui se meut à frottement doux dans la douille C, perpendiculairement à la barre verticale OD. A l'extrémité B de la tige est fixé un cordon qui, au moyen d'une poulie de renvoi E, va s'attacher au petit bras d'une balance romaine GOF.

La pièce OD étant fixée verticalement, et l'instrument étant arrêté sur cette barre à la profondeur où l'on veut prendre la vitesse v, la plaque A reçoit du courant une pression normale dont la valeur, par unité de surface, est représentée par Cv^2 et qui tend à pousser horizontalement la tige AB, par conséquent à faire descendre le bras OF. L'on fait mouvoir alors le poids P sur l'autre branche jusqu'à ce que le levier GOF, équilibré par lui-même, soit horizontal, c'est-à-dire qu'il y ait équilibre entre ce contre-poids et la pression du liquide.

Supposons donc que le levier GF soit équilibré par lui-même, et

qu'on néglige l'action des frottements qui ont cependant une influence variable suivant le fini et le travail de l'instrument. Soit x la distance du poids P à l'axe d'appui O, et a la longueur constante OF. L'on aura l'équation d'équilibre :

$$Px = aCv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{P}{aC}x} = N\sqrt{x} \quad \ldots\ldots\ldots \ (m)$$

Les vitesses seraient donc proportionnelles à la racine carrée des valeurs correspondantes de x.

Pour déterminer C l'on ferait comme précédemment, en donnant à v des vitesses connues v', v'', v''', etc. ; l'on remplaçerait, dans la relation (m), v par ces valeurs successives, et x par celles qui leur répondraient, et qu'il suffirait d'observer chaque fois sur la branche graduée GO. La moyenne des quantités C', C'', C''', etc., résultantes serait la valeur du coefficient constant propre à l'instrument employé.

g. **Moulinet de Woltmann** (fig. 68).

La pièce principale du moulinet de Woltmann est un arbre AB, tournant sur des points fixes, et portant deux ou quatre petites ailes disposées obliquement à l'axe AB, comme celles des moulins à vent. Cet arbre engrène à volonté avec un système de roues dentées qui communiquent avec un compteur destiné à indiquer le nombre de tours N que fait l'arbre en un temps connu T. Les roues sont montées sur un châssis CD, mobile autour d'une de ses extrémités C, et portant à l'autre bout un cordon DE. Dans l'état ordinaire le châssis CD est maintenu à distance de l'arbre par un ressort à boudin m ; pendant l'opération l'on tire de bas en haut le cordon DE ; le ressort cède à cette pression, et les roues viennent s'engrener dans l'hélice n de l'arbre tournant.

M. Baumgarten a modifié le moulinet de Woltmann en substituant aux bras à ailettes des ailes hélicoïdales se prolongeant jusqu'à l'arbre. Cette disposition a rendu l'instrument beaucoup plus sensible attendu qu'il fait plus de tours que le précédent en un temps donné sous l'action d'un même courant.

C. EXAMEN CRITIQUE DES FORMULES; APERÇU DES THÉORIES ET EXPÉRIENCES DE D'AUBUISSON, BAUMGARTEN, CHASLES, LATERRADE, COHEN, BOILEAU, ETC.

Plusieurs formules ont été proposées pour exprimer la vitesse au moyen du moulinet.

D'après D'Aubuisson, si on néglige la faible résistance due au frottement de l'arbre sur ses supports, la vitesse d'un courant est proportionnelle à celle des ailettes, et celle-ci l'est au nombre n de rotations décrites dans l'unité de temps, ou bien au quotient $\frac{N}{T}$, dans lequel N exprime le nombre de tours correspondant au temps T. Désignant encore par C un coefficient constant pour un même moulinet, D'Aubuisson en conclut la relation :

$$v = Cn \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dans un mémoire publié en 1847 (*) M. Baumgarten a proposé la formule suivante :

$$v = Cn + \sqrt{C'n^2 + C''} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

trouvée à l'aide de considérations analytiques plus ou moins exactes, et dans laquelle C, C′ et C″ sont encore des coefficients constants pour un instrument déterminé.

M. *Chasles*, dans son cours de l'école polytechnique, a donné une théorie plus simple mais moins complète que la précédente, de laquelle il a déduit pour la relation des vitesses :

$$v = Cn + C' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Cette formule peut se déduire de celle de Baumgarten, ainsi que le prouve M. Bresse dans son traité d'hydraulique; d'après lui, la différence entre les relations (2) et (3) résulte : 1° de ce que M. Chasles a supposé les actions et les réactions de l'eau concentrées au centre des ailettes; c'est-à-dire qu'il a admis que celles-ci fussent assez petites pour pouvoir être assimilées à un simple élément plan; 2° de ce que l'équation (2) n'a pas de terme particulier pour représenter la résistance

(*) *Annales des ponts et chaussées*. Novembre-décembre 1847, p. 349.

exercée par l'eau sur les bras du moulinet, résistance que M. Chasles a négligée.

Dans le mémoire précité. M. Baumgarten rapporte une série d'expériences qu'il a faites pour déterminer les valeurs des constantes C, C′ et C″; les vitesses imprimées ayant varié de 0^m317 à 3^m546 par seconde, c'est-à-dire comprenant les vitesses que l'on peut rencontrer dans la pratique. Ces expériences appartiennent à deux catégories distinctes : les unes ont été faites en promenant le moulinet en ligne droite dans une eau bien tranquille; les autres, en lui imprimant un mouvement circulaire, sauf à ramener le mouvement circulaire au mouvement rectiligne à l'aide d'un coefficient indiqué par l'auteur.

En 1858, M. *Laterrade*, ingénieur des ponts et chaussées, a publié (*) un mémoire dans lequel il a cherché à prouver, par la discussion des expériences de Baumgarten :

1° Que la formule (1) conduit à des résultats moins satisfaisants que les deux autres;

2° Que les résultats fournis par les relations (2) et (3) présentent à peu près le même degré d'exactitude;

3° Que la formule (2) doit être employée de préférence à celle de Baumgarten, puisque, à exactitude égale, elle offre l'avantage d'une plus grande simplicité.

Ces conclusions ne peuvent être admises d'une manière absolue. Il résulte en effet d'expériences récentes faites par M. Cohen, dans le but de déterminer les coefficients C et C′ du moulinet hélicoïdal Baumgarten, que la formule (2) satisfait bien aux résultats de l'expérience, pour des vitesses ordinaires; mais que, lorsque celles-ci sont très-faibles, la formule de Chasles ne parvient pas à donner la forme réelle du lieu géométrique des vitesses exprimé par l'équation $v = f(n)$.

En effet, soient (fig. 69) OX et OY deux axes de coordonnées rectangulaires; supposons que les nombres n', n'', n''', etc., de tours exécutés en une seconde par le moulinet et donnant des vitesses v', v'', v''', etc., servent d'abscisses à la courbe $v = f(n)$; les

(*) *Annales des ponts et chaussées*. Janvier-février 1858.

vitesses v', v'', v''', etc., correspondantes servant d'ordonnées verticales.

Si l'on construit le lieu géométrique représenté par l'équation de Chasles :

$$v = f(n) = Cn + C'$$

l'on obtiendra une ligne droite AB qui vient couper l'axe des y en un point A tel que OA $= C'$, et dont l'inclinaison de la tangente sur l'axe des x est exprimée par C.

Or, la construction graphique des données de l'expérience a prouvé que, dans les basses vitesses, le lieu géométrique cesse d'être linéaire. Pour construire un point quelconque de la courbe, correspondant à une vitesse v', il suffisait de porter cette vitesse connue sur un axe OY, et le nombre correspondant n' de tours de l'instrument sur un axe perpendiculaire OX. La courbe ainsi obtenue par M. Cohen a présenté les caractères suivants :

1° Avec des vitesses répondant à plus de deux tours par seconde, le moulinet hélicoïdal de M. Baumgarten place tous les points du lieu géométrique sur une ligne droite, dont l'inclinaison est constante pour un même instrument, quelles que soient les dispositions du système pendant l'opération.

2° En dessous de deux révolutions par seconde, la loi cesse d'être constante. Ainsi, entre deux tours et un tour, le lieu géométrique est une courbe légèrement convexe du côté de l'axe des abscisses ; et il paraîtrait que cette partie curviligne devient concave vers cet axe, à partir du point correspondant à $n = \frac{1}{3}$.

L'équation (3) proposée par Baumgarten rend compte de ces résultats de l'expérience. En effet, si l'on prend sa différentielle après l'avoir mise sous la forme :

$$v = Cn + \sqrt{C'^2 n^2 + C''}$$

l'on obtient, pour valeur de la tangente aux divers points du lieu géométrique représenté par la relation (3) :

$$\frac{dv}{dn} = C + \frac{C'}{\sqrt{1 + \frac{C''}{C'^2 n^2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Faisant $n = 0$, il vient :

$$v = \sqrt{C''}$$

dans l'équation (3), et :

$$\frac{dv}{dn} = C$$

Ainsi, le lieu géométrique coupe l'axe des y, ou des vitesses, en un point A′ situé à une distance de l'origine égale à $\sqrt{C''}$, terme qui représente en effet, dans la formule de Baumgarten, les résistances dues au frottement. L'on voit aussi que ce point A′ appartient à une courbe, puisque celle-ci y a déjà une certaine inclinaison $\frac{dv}{dn} = C$, sur l'axe des x ou des tours.

Pour des valeurs de n croissant de zéro à l'infini, v et $\frac{dv}{dn}$ vont toujours en croissant; la courbe a donc la forme indiquée en A′B′(fig. 66), c'est-à-dire qu'elle reste convexe du côté de l'axe des x; sa tangente en A′ a pour inclinaison $\frac{dv}{dn} = C$, et en B′, censé à l'infini, $\frac{dv}{dn} = C + C'$, obtenue en faisant $n = \alpha$ dans la relation (4).

La formule de Baumgarten n'indique pas de changement de courbure vers le point m, ainsi qu'il résulterait des expériences de M. Cohen; mais ce fait n'est peut-être qu'une anomalie que des expériences ultérieures viendront modifier. D'un autre côté, cette formule précise très-bien les circonstances dans lesquelles on pourra considérer la courbe comme sensiblement rectiligne. En effet, si l'on remarque que le terme C″, correspondant au frottement, est toujours très-faible, et que l'expression C'^2n^2 prend une valeur d'autant plus grande que le nombre de tours est plus considérable, l'on en conclura qu'à partir d'une certaine valeur de n, le terme $\frac{C''}{C'^2n^2}$ devient négligeable par rapport à l'unité, dans la relation (4); la tangente $\frac{dv}{dn}$ tend à atteindre par degrés insensibles la valeur $C + C'$, c'est-à-dire, devient asymptote à une droite B′A″ partant de l'infini et faisant avec l'axe des x un angle $B'A''X' = C + C'$. Nous avons vu par les expériences de M. Cohen qu'en se servant du moulinet hélicoïdal de Baumgarten qui

a $0^m,02$ de hauteur et $0^m,08$ de diamètre, la forme de la courbe peut être confondue avec celle de la ligne droite, pour des valeurs de n supérieures à 2, et même à 1,75. Dans les expériences faites avec des vitesses inférieures à $0^t,30$ par seconde, le moulinet a marché d'une façon irrégulière et par saccades, tantôt s'arrêtant complétement, tantôt marchant très-vite.

L'on peut déduire de ce qui précède que les conclusions de M. Laterrade sont trop absolues; qu'en outre, la formule (3) de Baumgarten répond seule aux phénomènes de la pratique pour certaines valeurs de la vitesse.

L'erreur de M. Laterrade est due, en partie, à ce que les expériences qu'il a discutées ne se sont pas étendues à des vitesses assez faibles, et en partie, à ce qu'elles ont été faites par Baumgarten à l'aide du moulinet de Woltmann, moins sensible que celui qu'a employé M. Cohen; car la théorie et l'expérience tendent à prouver que la courbure est d'autant plus sensible que l'instrument l'est plus lui-même.

Il est facile d'établir la supériorité du moulinet hélicoïdal de $0^m,08$ sur celui de Woltmann par les formules mêmes qui appartiennent à ces instruments. L'équation du moulinet de Woltmann (1) est la suivante :

$$v = 0,3595\, n + \sqrt{0,00071\, n^2 + 0,0018}$$

Celle du moulinet hélicoïdal de $0^m,08$:

$$v = 0,08\, n + \sqrt{0,00057\, n^2 + 0,0063}$$

Les coefficients C et C'^2 sont donc beaucoup plus forts dans la première formule, tandis que C'' y est plus petit.

Or, d'après les relations (3) et (4), les augmentations de C et de C' ont pour résultat de diminuer le nombre de tours correspondant à une vitesse donnée, fait qui n'est que faiblement combattu par la diminution de C''. Comme la sensibilité d'un moulinet croît avec le nombre de tours correspondant à une vitesse donnée, il faut conclure de ce qui précède que le moulinet Baumgarten de $0^m,08$ doit être préféré au moulinet de Woltmann ordinaire.

L'on doit à M. le capitaine d'artillerie *Boileau*, auteur d'un Traité

(1) *Annales des ponts et chaussées*. 2e série, t. XIV.

sur la mesure des eaux courantes, un instrument plus sensible encore que celui de Baumgarten; ainsi, pour une vitesse d'environ $0^m,80$ par seconde, le moulinet de M. Boileau donne $9^t,50$, tandis que le moulinet hélicoïdal de $0^m,08$ n'en fait que 7,79.

D. TARAGE DU MOULINET.

Quelques précautions sont nécessaires dans les opérations du tarage; l'on peut généralement adopter la marche suivante :

1° Placer le moulinet à l'avant de la barque, en saillie d'environ 1 mètre, et le plonger de $0^m,60$ à $0^m,80$ dans l'eau afin d'éviter l'action de la barque sur le liquide à proximité de l'instrument.

2° Disposer le système de traction, et manœuvrer le bateau de manière que la direction de celui-ci reste bien rectiligne et soustraite à l'influence du vent. Nous citerons, comme exemple, les dispositions employées par M. Cohen dans les expériences mentionnées plus haut.

Le mouvement était donné, au début, par deux hommes marchant sur les rives, et qui halaient le bateau en le tirant chacun par deux cordes attachées l'une à l'avant, l'autre à l'arrière. L'un de ces hommes, muni d'un compteur, donnait le pas à l'autre de façon à avoir la même vitesse.

L'on reconnut bientôt l'insuffisance de ce dispositif pour lutter contre les effets du vent. Lorsque celui-ci prenait le bateau par le travers il le faisait dévier de la ligne droite malgré l'action directrice des quatre cordes; parfois aussi, lorsqu'il enfilait le canal, la vitesse du bateau était sensiblement accélérée ou retardée.

Pour éviter ces inconvénients, l'on ajouta aux quatre cordes deux longues perches, fixées chacune par un bout aux flancs du batelet, et poussées à l'autre bout par les haleurs; les cordes étaient réunies deux à deux à l'extrémité libre des perches.

3° Coupler chaque expérience, c'est-à-dire faire parcourir au bateau le même chemin deux fois pour une vitesse déterminée, mais dans des directions opposées; avoir bien soin de suivre chaque fois la même piste, et de maintenir la vitesse aussi constante que possible. Admettre alors qu'à la demi-somme des vitesses par seconde déduites de ces deux observations correspond la demi-somme des nombres moyens de tours exécutés pendant le même temps.

E. JAUGEAGE THÉORIQUE ET PRATIQUE DES COURS D'EAU.

Le jaugeage d'un cours d'eau est l'opération par laquelle on détermine le volume liquide qu'il est susceptible de fournir en une seconde, autrement dit, sa dépense ; celle-ci a été représentée antérieurement par Q, et sa valeur a été exprimée par la relation :

$$Q = \Omega U$$

Pour connaître U, la vitesse moyenne, l'on aura recours à l'un des moyens suivants.

1° L'observation par les hydromètres, en y joignant l'emploi d'une des formules indiquées au chap. IV et qui donnent U en fonction des vitesses en d'autres points.

Lorsqu'on n'a pas besoin d'une grande précision, un procédé très-simple consiste à mesurer, au moyen de flotteurs, la vitesse V maxima à la surface du courant, et à en déduire approximativement la vitesse moyenne U par la formule $U = 0{,}80\ V$.

2° Les formules du chap. IV qui donnent directement U en fonction de quantités connues ; telle est, par exemple, la formule :

$$Hi \quad \text{ou} \quad \frac{\Omega}{\chi} i = b_1 U^2$$

Mais il est préférable généralement d'employer les moyens d'observation directe, à cause de l'incertitude qui subsiste encore sur la valeur du coefficient b_1.

Lorsque le cours d'eau est de faible importance, on peut employer un autre procédé pour la détermination de Q. Il consiste à faire passer tout le débit sur un déversoir ou sous une vanne, et à la rigueur sur un barrage provisoire en planches. L'on en déduit la dépense par les formules correspondantes données au chap. III.

FIN.

Table A.

Hauteurs correspondantes à des vitesses comprises entre 1m00 et 10m00 par seconde.

VITESSES.	HAUTEURS.	VITESSES.	HAUTEURS.
1m01	0m05200	1m95	0m19383
1,02	0,05303	2,00	0,20390
1,03	0,05408	2,10	0,22480
1,04	0,05513	2,20	0,24670
1,05	0,05620	2,30	0,26970
1,06	0,05728	2,40	0,29360
1,07	0,05836	2,50	0,31860
1,08	0,05946	2,60	0,34460
1,09	0,06056	2,70	0,37160
1,10	0,06168	2,80	0,39960
1,15	0,06741	2,90	0,42870
1,20	0,07340	3,00	0,45880
1,25	0,07965	3,50	0,62440
1,30	0,08615	4,00	0,81560
1,35	0,09290	4,50	1,03220
1,40	0,09991	5,00	1,27440
1,45	0,10717	5,50	1,54200
1,50	0,11469	6,00	1,83510
1,55	0,12247	6,50	2,15370
1,60	0,13050	7,00	2,49780
1,65	0,13878	7,50	2,86730
1,70	0,14732	8,00	3,26240
1,75	0,15611	8,50	3,68290
1,80	0,16516	9,00	4,12890
1,85	0,17446	9,50	4,60050
1,90	0,18402	10,00	5,09750

Table B.

Orifices rectangulaires en mince paroi, de 0m20 de largeur, débouchant à l'air libre et complétement isolés du fond et des parois.

CHARGES SUR LE SOMMET DES ORIFICES.	COEFFICIENTS DE DÉPENSE POUR DES HAUTEURS D'ORIFICE DE					
	0m20	0m10	0m05	0m03	0m02	0m01
0m010	»	»	0,607	0,630	0,660	0,701
0,015	»	0,593	0,612	0,632	0,660	0,697
0,020	0,572	0,596	0,616	0,639	0,660	0,695
0,030	0,578	0,600	0,620	0,641	0,659	0,689
0,040	0,582	0,603	0,623	0,640	0,659	0,684
0,050	0,585	0,605	0,625	0,640	0,658	0,679
0,060	0,587	0,607	0,626	0,639	0,657	0,677
0,070	0,588	0,609	0,628	0,639	0,656	0,673
0,080	0,589	0,610	0,629	0,638	0,656	0,670
0,090	0,591	0,610	0,629	0,637	0,655	0,668
0,10	0,592	0,611	0,630	0,637	0,655	0,667
0,20	0,598	0,615	0,631	0,634	0,649	0,655
0,25	0,599	0,616	0,630	0,632	0,646	0,653
0,30	0,600	0,616	0,630	0,632	0,645	0,650
0,40	0,602	0,617	0,629	0,631	0,642	0,646
0,60	0,604	0,617	0,627	0,630	0,638	0,641
0,80	0,605	0,616	0,627	0,629	0,636	0,637
1,00	0,605	0,615	0,625	0,627	0,632	0,629
1,20	0,604	0,614	0,624	0,626	0,628	0,626
1,40	0,603	0,612	0,621	0,622	0,622	0,618
1,60	0,602	0,611	0,618	0,618	0,617	0,613
1,80	0,601	0,609	0,615	0,615	0,614	0,612
2,00	0,601	0,607	0,613	0,613	0,613	0,613
3,00	0,601	0,603	0,606	0,607	0,608	0,609

Table C.

Orifices de la table B, *mais avec contraction supprimée sur leur côté inférieur.*

CHARGES SUR LE SOMMET DES ORIFICES.	COEFFICIENTS DE DÉPENSE POUR LES HAUTEURS D'ORIFICE DE					
	0m20	0m10	0m05	0m03	0m02	0m01
0,02	0,599	0,624	0,664	0,691	0,703	0,756
0,03	0,603	0,629	0,665	0,687	0,702	0,747
0,04	0,605	0,633	0,666	0,686	0,701	0,741
0,06	0,610	0,637	0,667	0,686	0,699	0,732
0,10	0,615	0,643	0,669	0,684	0,698	0,722
0,20	0,621	0,648	0,670	0,681	0,696	0,712
0,30	0,622	0,648	0,670	0,681	0,695	0,709
0,40	0,623	0,648	0,669	0.681	0,695	0,706
0,60	0,624	0,648	0,668	0,679	0,693	0,703
1,00	0,624	0,647	0,666	0,676	0,692	0,701
1,50	0,624	0,644	0,665	0,675	0,687	0,697
2,00	0,619	0,641	0,664	0,675	0,683	0,693
3,00	0,614	0,639	0,662	0,675	0,680	0,689

Table D.

Orifices de la table B *modifiés comme suit :*

VARIANTES.	CHARGES SUR LE SOMMET DES ORIFICES.	COEFFICIENT DE DÉPENSE POUR DES HAUTEURS D'ORIFICE DE		
		0m20	0m05	0m01
a. La contraction étant supprimée sur les deux bords verticaux.	0,02	»	0,655	0,715
	0,04	0,649	0,651	0,699
	0,10	0,645	0,645	0,683
	0,20	0,641	0,642	0,675
	0,40	0,639	0,641	0,668
	0,60	0,638	0,639	0,665
	1,00	0,638	0,634	0,658
	1,50	0,637	0,627	0,651
	2,00	0,636	0,621	0,647
	3,00	0,634	0,614	0,644
b. La contraction étant supprimée sur le côté inférieur et les bords verticaux.	0,06	»	0,699	»
	0,10	»	0,696	»
	0,20	0,708	0,693	»
	0,30	0,687	0,691	»
	0,40	0,682	0,690	»
	0,60	0,679	0,688	»
	1,00	0,676	0,685	»
	1,50	0,672	0,681	»
	2,00	0,668	0,680	»
	3,00	0,665	0,678	»

Table E.

Orifices rectangulaires en mince paroi, de 0m20 de largeur sur diverses hauteurs, prolongés en dehors par un canal rectangulaire, horizontal et découvert, de même largeur que l'orifice.

VARIANTES	CHARGES SUR LE SOMMET DES ORIFICES.	COEFFICIENTS DE DÉPENSE POUR DES HAUTEURS D'ORIFICE DE				
		0m20	0m10	0m05	0m03	0m01
a'. Orifices complétement isolés des parois latérales et du fond.	0m02	0,480	0,484	0,488	0,501	0,599
	0,04	0,503	0,527	0,555	0,598	0,645
	0,10	0,542	0,586	0,624	0,633	0,671
	0,30	0,591	0,612	0,629	0,631	0,658
	0,60	0,600	0,615	0,625	0,628	0,644
	1,00	0,601	0,615	0,624	0,625	0,631
	1,50	0,601	0,612	0,619	0,620	0,618
	2,00	0,601	0,607	0,615	0,613	0,613
	3,00	0,601	0,603	0,606	0,607	0,609
b'. La contraction étant supprimée sur le côté inférieur.	0,02	0,480	»	0,487	»	0,616
	0,04	0,502	»	0,552	»	0,660
	0,10	0,538	»	0,605	»	0,682
	0,30	0,580	»	0,622	»	0,676
	0,60	0,595	»	0,627	»	0,670
	1,00	0,600	»	0,628	»	0,665
	1,50	0,602	»	0,627	»	0,657
	2,00	0,602	»	0,623	»	0,654
	3,00	0,601	»	0,618	»	0,652

Table F.

Orifices de la table E *modifiés comme suit :*

VARIANTES.	CHARGES SUR LE SOMMET DES ORIFICES.	COEFFICIENT DE DÉPENSE POUR DES HAUTEURS D'ORIFICE DE		
		0m20	0m05	0m01
c'. Orifices avec bords verticaux en saillie de 0m02 sur les parois latérales, le côté inférieur étant isolé du fond.	0,02	0,496	0,557	0,675
	0,04	0,522	0,592	0,688
	0,10	0,563	0,628	0,694
	0,30	0,607	0,636	0,677
	0,60	0,625	0,635	0,669
	1,00	0,628	0,635	0,663
	1,50	0,627	0,634	0,656
	2,00	0,626	0,634	0,651
	3,00	0,624	0,632	0,648
d' Orifices avec contraction supprimée sur leur côté inférieur, et bords verticaux en saillie de 0m02 sur les parois latérales.	0,02	»	0,512	0,625
	0,04	0,518	0,566	0,667
	0,10	0,560	0,621	0,697
	0,30	0,603	0,643	0,696
	0,60	0,623	0,648	0,690
	1,00	0,630	0,649	0,685
	1,50	0,633	0,647	0,679
	2,00	0,632	0,644	0,674
	3,00	0,630	0,639	0,670

Table G.

Déversoirs rectangulaires en mince paroi, de 0m20 de largeur.

VARIANTES.	CHARGES SUR LE SEUIL DU DÉVERSOIR.	COEFFICIENT DE DÉPENSE POUR LES VARIANTES.			
		B	C	Da	Db
Débouchant librement à l'air.	0,01	0,424	0,384	0,492	0,292
	0,02	0,417	0,402	0,473	0,318
	0,04	0,407	0,411	0,449	0,352
	0,06	0,401	0,410	0,437	0,370
	0,10	0,395	0.408	0,434	0,382
	0,14	0,393	0,408	0,434	0,383
	0,20	0,390	0,405	0,432	0,383
	0,25	0,379	0,404	0,428	0,381
	0,30	0,371	0,403	0,424	0,378
Prolongés extérieurement par un canal horizontal découvert, de même section que l'orifice.		Ea′	Eb′	Ec′	Ed′
	0,02	0,196	0,208	0,383	0,175
	0,04	0,263	0,251	0,365	0,234
	0,06	0,286	0,281	0,355	0,276
	0,10	0,304	0,302	0,345	0,299
	0,14	0,313	0,312	0,341	0,311
	0,20	0,319	0,323	0,338	0,322
	0,25	0,321	0,329	0,336	0,329
	0,30	0,324	0,332	0,334	0,332

ERRATA.

Pages 49, 56, 143, 151, 181, etc., *au lieu de* D'Arcy, *lisez* Darcy.

Page	57,	ligne	9,	*au lieu de*	fig. 7,	*lisez*	fig. 7².
»	59,	»	27,	»	id.	»	id.
»	83,	»	24,	»	B, C et D	»	C et D.
»	106,	»	12,	»	F	»	G.
»	108,	«	20,	»	id.	»	id.
»	108,	»	30,	»	id.	»	id.
»	206,	»	21,	»	*z*	»	H

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVANT-PROPOS 5

HYDRAULIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

HYDROSTATIQUE ET HYDRODYNAMIQUE RATIONNELLES.

A. *Notions générales* 11
I. Définitions . . . . . *ibid.*
II. De la fluidité 17
B. *Hydrostatique* . . . . . *ibid.*
a. Action des forces extérieures . . . . . *ibid.*
b. Action de la pesanteur 18
c. Surface libre des liquides pesants 19
d. Pression sur le fond du vase . . . . . *ibid.*
e. Pression d'un vase sur son support 21
f. Résultante des pressions sur le vase . . . . . *ibid.*
g. Pression sur les parois . . . . . *ibid.*
h. Principe d'Archimède. Corps plongés 25
k. Centre de pression d'une surface plane . . . . . *ibid.*
l. Équilibre des corps flottants ou plongés 27
C. *Hydrodynamique* 28
a'. Pression des fluides en mouvement . . . . . *ibid.*
b'. Mouvement permanent et mouvement varié 29
c'. Parallélisme des tranches . . . . . *ibid.*
d'. Continuité des fluides 31
e'. Recherche de la pression dans les liquides en mouvement 33
f'. Équations générales du mouvement d'un fluide parfait 43
g'. De la viscosité; aperçu critique de quelques théories 49
h'. Des piézomètres 56

CHAPITRE DEUXIÈME.

ÉCOULEMENT PERMANENT D'UN LIQUIDE PESANT ET HOMOGÈNE.

A. *Par un orifice percé dans un réservoir* 61
a. Vitesse de l'écoulement . . . . . *ibid.*
b. Forme de la veine fluide 66

Pages.

c. De la dépense théorique et de la dépense réelle pour des orifices en mince paroi. 69
d. Calcul pratique de la dépense. 74
I. Orifice percé dans une paroi mince et plane ; la contraction étant complète. *ibid.*
II. Orifices percés dans des parois planes épaisses. 80
III. Orifices percés dans des parois non planes. . . . . *ibid.*
IV. L'orifice étant très-grand 82
V. La contraction de la veine étant incomplète. . . . . *ibid.*
VI. Écoulement sous de faibles charges 84
VII. Écoulement d'un réservoir dans un autre 85
B. *Influences d'un rétrécissement ou d'un élargissement brusque, dans l'intérieur d'un réservoir ou d'un tuyau* 86
a. Formules de D'Aubuisson . . . . . *ibid.*
b. Méthode pour le principe des forces vives 89
c. Méthode de M. Belanger. 92
C. *Des ajutages* 97
I. Ajutages cylindriques . . . . . *ibid.*
II. Ajutages coniques convergents 98
III. Ajutages coniques divergents. . . . . *ibid.*
IV. De l'action des ajutages 99

CHAPITRE TROISIÈME.

APPLICATIONS.

A. *Des déversoirs* 104
B. *Des vannes* 115
a. Vannes verticales . . . . . *ibid.*
b. Vannes inclinées. Système Chaubart 120
c. Bateau-vanne 125
C. *Des écluses* 126
a. Écoulement d'un réservoir dans un autre, le niveau demeurant constant pour chacun d'eux . . . . . *ibid.*
b. Le niveau étant constant dans le réservoir supérieur et variable dans l'autre. . 128
c. Le niveau des deux réservoirs étant variable. 129
D. *Des barrages à poutrelles* 133
a. Poutrelles horizontales . . . . . *ibid.*
b. Poutrelles verticales ou aiguilles. . . . . *ibid.*

CHAPITRE QUATRIÈME.

ÉCOULEMENT PERMANENT DE L'EAU DANS LES TUYAUX DE CONDUITE ET DANS LES CANAUX DÉCOUVERTS.

A. *Considérations générales.* 139
a. Des espèces de mouvement . . . . . *ibid.*
b. Propriétés de la viscosité . . . . . *ibid.*
c. Variations de la pression 141
d. Courbe des vitesses 142
e. Vitesse moyenne 144
B. *Des tuyaux de conduite* 145
I. *Le mouvement étant rectiligne et uniforme. Tuyaux cylindriques simples, circulaires et à débit constant* . . . . . *ibid.*
a. Recherche de la vitesse moyenne. . . . . *ibid.*
b. Théories et formules de Dubuat, Coulomb, Girard, De Prony, Eytelwein,

Pages.

D'Aubuisson, Navier, Dupuit, Belanger, Tadini, de Saint-Venant, Sonnet et Darcy. — Examen critique de la formule $F(U) = \alpha U + \beta U^2$. 151
c. Résolution d'équations générales et de cas particuliers 183
II. *Mouvement permanent varié; conduites simples à diamètre ou à débit variable* . 187
a. Les variations de diamètre et de débit n'étant pas continues . . . . . *ibid.*
b. Équation générale du mouvement permanent varié, les variations étant continues 192
c. Conduites simples à diamètre variable et à débit constant 195
III. *Des coudes et embranchements* 198
a. Des coudes . . . . . *ibid.*
b. Des embranchements. 200
C. *Des canaux découverts*. 203
I. *Mouvement rectiligne et uniforme* . . . . . *ibid.*
a. Loi et courbe des vitesses 204
b. Examen critique des théories de Dubuat, De Prony, D'Aubuisson, Eytelwein, Sonnet, Dupuit et Darcy 208
c. Théorie rationnelle du mouvement uniforme dans les canaux très-larges et à fond peu accidenté 232
d. Formules et applications 237
II. *Mouvement varié permanent* 241
a. Du mouvement varié . . . . . *ibid.*
b. Théorie ordinaire du mouvement varié permanent. . . . . *ibid.*
c. Examen critique de la formule ordinaire du mouvement permanent varié; aperçu comparé des théories de Belanger, Navier, Coriolis, Dupuit, etc. . 243
d. Discussion de la courbe affectée par la surface des cours d'eau; courbes et tabbles remous 248
I° Considérations générales et définitions. . . . . *ibid.*
II° Discussion de la courbe du courant pour le mouvement varié permanent et dans un canal régulier 250
III° Problèmes 255
IV° Courbes et tables de remous 256

CHAPITRE CINQUIÈME.

PRESSION RÉCIPROQUE EXERCÉE PAR LES SOLIDES ET LES FLUIDES DANS LEUR MOUVEMENT RELATIF.

A. *Notions générales* 266
B. *Résistance d'un prisme fixe au mouvement rectiligne et uniforme d'un fluide indéfini qui le rencontre normalement* 267
C. *Résistance éprouvée par un solide qui se meut d'un mouvement uniforme et rectiligne dans un liquide indéfini, relativement en repos* 271
1° Solides entièrement plongés . . . . . *ibid.*
2° Solides prismatiques flottants. 273
D. *Pression exercée par le choc continu d'une veine fluide contre un plan fixe ou mobile.* 275
E. *Calcul théorique de la résistance d'un obstacle fixe au mouvement rectiligne et uniforme d'un fluide indéfini qui le rencontre d'une manière quelconque* 277
1° Surface plane 278
2° Cylindre à section circulaire 279
3° Solide sphérique . . . . . *ibid.*
Conclusions 280

CHAPITRE SIXIÈME.

JAUGEAGE DES COURS D'EAU.

A *Notions générales* 282
B. *Mesure des vitesses*. . . . . *ibid.*

Pages.

I. Vitesse à la surface d'un courant 282
a. Flotteurs . . . . . *ibid.*
b. Volant à aubes 283
c. Pendule hydrométrique 284
II. Vitesse en un point quelconque 285
d. Tube de Pitot . . . . . *ibid.*
e. Tube de Pitot perfectionné par Darcy et Baumgarten 287
f. Balances hydrométriques ; tachomètre de Brünings 288
g. Moulinet de Woltmann 289
C. *Examen critique des formules ; aperçu des théories et expériences de D'Aubuisson, Baumgarten, Chasles, Laterrade, Cohen, Boileau*, etc. 290
D. *Tarage du moulinet* 295
E. *Jaugeage théorique et pratique des cours d'eau* 296

TABLES.

Table A. Hauteurs correspondantes à des vitesses comprises entre 1m00 et 10m00 par seconde 297
Table B. Orifices rectangulaires en mince paroi, de 0m20 de largeur, débouchant à l'air libre et complétement isolés du fond et des parois 298
Table C. Orifices de la table B, mais avec contraction supprimée sur leur côté inférieur. 299
Table D. Orifices de la table B modifiés 300
Table E. Orifices rectangulaires en mince paroi, de 0m20 de largeur sur diverses hauteurs, prolongés en dehors par un canal rectangulaire, horizontal et découvert, de même largeur que l'orifice 301
Table F. Orifices de la table E modifiés 302
Table G. Déversoirs rectangulaires en mince paroi, de 0m20 de largeur 303

C

D

E

Ta

Ta

Ta

Ta

Ta

Ta

Ta

C.

D

E.

T

T

T

T

T

T

T

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

Eng 928.61
Traite descriptif et raisonne des
Cabot Science 006452137
3 2044 091 940 742